高等数学考试说明

Ⅰ. 考试性质

普通高等学校本科插班生招生考试是由专科毕业生参加的选拔性考试. 高等学校根据考生的成绩，按已确定的招生计划，择优录取. 因此，本科插班生考试应有较高的信度、较高的效度、必要的区分度和适当的难度.

本大纲适用于所有需要参加高等数学考试的各专业考生.

Ⅱ. 考试内容和要求

总体要求：考生应按本大纲的要求了解或理解“高等数学”中函数、极限和连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学初步、常微分方程初步和常数项级数的基本概念与基本理论，掌握或熟练掌握上述各部分的基本方法. 应理解各部分知识结构及知识的内在联系；应具有一定的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力；能运用基本概念、基本理论和基本方法，正确地判断和证明，准确地计算；能综合运用所掌握知识分析并解决简单的实际问题.

一、函数、极限和连续

（一）函数

1. 考试内容

（1）函数的概念：函数的定义，函数的表示法，分段函数.

（2）函数的简单性质：单调性、奇偶性、有界性、周期性.

（3）反函数.

（4）函数的四则运算与复合运算.

（5）基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

（6）初等函数.

2. 考试要求

（1）理解函数的概念，会求函数包括分段函数的定义域、表达式及函数值，并会作出简单的分段函数图象.

（2）掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性定义，会判断所给函数的相关性质.

（3）理解函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系（定义域、值域、图象），会求单调函数的反函数.

（4）掌握函数的四则运算与复合运算，熟练掌握复合函数的复合过程.

（5）掌握基本初等函数的简单性质及其图象.

（6）掌握初等函数的概念.

（二）极限

1. 考试内容

（1）数列和数列极限的定义.

（2）数列极限的性质：唯一性、有界性、四则运算定理、夹逼定理、单调有界数列极限存在性定理.

（3）函数极限的概念：函数在一点处的极限定义，左、右极限及其与极限的关系，趋于无穷大（$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时函数极限的定义，函数极限的几何意义.

（4）函数极限的性质：唯一性、夹逼定理、四则运算定理.

（5）无穷小量与无穷大量：无穷小量与无穷大量的定义，无穷小量与无穷大量的性质，两个无穷小量阶的比较.

（6）两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

2. 考试要求

（1）了解极限的概念（不要求用“$\varepsilon-N$”“$\varepsilon-\delta$”“$\varepsilon-X$”语言证明具体极限的存在性），掌握函数在一点处的左极限与右极限的概念，极限存在的充分必要条件.

（2）了解极限的有关性质，掌握极限的四则运算法则.

（3）理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质，会进行无穷小量阶的比较（高阶、低阶、同阶、等价）.

（4）熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

（三）连续

1. 考试内容

（1）函数连续的概念：函数在一点连续、左连续和右连续的定义，函数在一点连续的充分必要条件，函数的间断点及其分类.

（2）函数连续的性质：四则运算连续性、复合函数连续性.

（3）闭区间上连续函数的性质：有界性定理、最大值与最小值定理、介值性定理（含零点定理）.

（4）初等函数的连续性.

2. 考试要求

（1）理解函数在一点连续与间断的概念，掌握判断函数（含分段函数）在一点处连续的方法，理解函数在一点连续与极限存在之间的关系.

（2）会求函数的间断点并确定其类型（第一类间断点、第二类间断点）.

（3）理解在闭区间上连续函数的性质.

（4）理解初等函数在其定义区间上的连续性，并会利用函数连续性求极限.

二、一元函数微分学

（一）导数与微分

1. 考试内容

（1）导数概念：导数、左导数与右导数的定义，导数的几何意义，可导与连续的关系.

（2）导数的基本公式.

（3）求导方法：函数的四则运算求导法、复合函数的求导法、隐函数的求导法、对数

求导法、由参数方程所确定的函数的导数求法.

（4）高阶导数的定义，高阶导数的计算.

（5）微分的定义，微分与导数的关系，微分法则，一阶微分形式不变性.

2. 考试要求

（1）理解导数的概念及其几何意义，了解可导性与连续性的关系，会用定义求函数在一点处的导数.

（2）会求曲线上一点处的切线方程和法线方程.

（3）熟练掌握导数的基本公式、四则运算法则、反函数的求导法则以及复合函数的求导方法.

（4）掌握隐函数的求导法、对数求导法和由参数方程所确定的函数的导数求法.

（5）理解高阶导数的概念，会求函数的二、三阶导数.

（6）理解微分的概念，掌握微分法则，了解可微与可导的关系，会求函数的一阶微分.

（二）中值定理及导数的应用

1. 考试内容

（1）中值定理：罗尔（Rolle）中值定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理、柯西（Cauchy）中值定理.

（2）洛必达（L'Hospital）法则.

（3）函数单调性的判定法.

（4）函数极值与极值点、最大值与最小值.

（5）曲线的凹凸性、拐点.

（6）函数曲线的水平渐近线.

2. 考试要求

（1）了解罗尔中值定理、拉格朗日中值定理及其应用，了解柯西中值定理（知道定理的条件及结论）.

（2）熟练掌握应用洛必达法则求“$\frac{0}{0}$”“$\frac{\infty}{\infty}$”“$0\cdot\infty$”“$\infty-\infty$”“1^{∞}”“0^{0}”和“∞^{0}”型未定式极限的方法.

（3）掌握利用导数判定函数的单调性及求函数的单调区间的方法，会利用函数的单调性证明简单的不等式.

（4）理解函数极值的概念，掌握求函数的极值、最大值和最小值的方法，并会应用极值方法解应用题.

（5）会判定曲线的凹凸性，会求曲线的拐点.

（6）会求曲线的水平渐近线.

三、一元函数积分学

（一）不定积分

1. 考试内容

（1）原函数与不定积分的定义，不定积分的性质.

（2）基本积分公式.

（3）换元积分法：第一换元法（凑微分法）、第二换元法.

（4）分部积分法.

（5）一些简单有理函数的积分.

2. 考试要求

（1）理解原函数与不定积分的概念及其关系，掌握不定积分的性质.

（2）熟练掌握不定积分的基本公式.

（3）熟练掌握不定积分第一换元法，掌握第二换元法（仅限三角代换与简单的根式代换）.

（4）熟练掌握不定积分分部积分法.

（5）掌握简单有理函数的不定积分.

（二）定积分

1. 考试内容

（1）定积分的定义及其几何意义，可积条件.

（2）定积分的性质.

（3）定积分的计算：变上限的定积分，牛顿—莱布尼兹（Newton－Leibniz）公式，换元积分法，分部积分法.

（4）无穷区间的广义积分收敛和发散的概念.

（5）定积分的应用：平面图形的面积、旋转体的体积、平面曲线的弧长.

2. 考试要求

（1）理解定积分的概念与几何意义，了解函数连续是可积的充分条件.

（2）掌握定积分的基本性质.

（3）理解变上限的定积分是连续的被积函数的一个原函数，掌握对变上限定积分求导数的方法.

（4）掌握牛顿—莱布尼兹公式.

（5）掌握定积分的换元法与分部积分法.

（6）了解无穷区间广义积分的概念，并会进行计算.

（7）掌握直角坐标下用定积分计算平面图形的面积以及平面图形绕坐标轴旋转所生成的旋转体体积的方法.

（8）了解直角坐标下计算平面曲线弧长（含参数方程）的方法.

四、多元函数微积分学初步

1. 考试内容

（1）多元函数的概念：多元函数的定义，二元函数的定义域.

（2）偏导数与全微分：一阶偏导数，高阶偏导数，全微分.

（3）复合函数的偏导数，隐函数的偏导数.

（4）二重积分的概念，二重积分的性质，直角坐标及极坐标下二重积分的计算.

2. 考试要求

（1）理解多元函数的概念，会求二元函数的定义域，了解二元函数的几何意义.

（2）理解二元函数的一阶偏导数和全微分的概念，掌握二元函数的一阶偏导数及二阶偏导数的求法，掌握二元函数全微分的求法.

（3）掌握复合函数与隐函数的偏导数的求法.

（4）理解二重积分的概念，掌握二重积分的性质，掌握直角坐标及极坐标下二重积分的计算方法.

五、常微分方程初步

1. 考试内容

（1）微分方程的基本概念.

（2）一阶微分方程：可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程.

（3）二阶常系数线性齐次方程.

2. 考试要求

（1）了解微分方程的阶、解、通解、特解及初值条件等基本概念.

（2）会求可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程的通解及特解.

（3）会求二阶常系数线性齐次微分方程的通解及特解.

六、常数项级数

1. 考试内容

（1）常数项级数的概念.

（2）收敛级数的基本性质.

（3）常数项级数的审敛法.

2. 考试要求

（1）理解常数项级数收敛、发散及和的定义.

（2）掌握几何级数、调和级数及 p – 级数的敛散性.

（3）理解收敛级数的基本性质.

（4）掌握正项级数的比较审敛法和比值审敛法.

Ⅲ. 考试形式及试卷结构

一、考试形式

闭卷，笔试，试卷满分为 100 分，考试时间为 120 分钟.

二、试卷内容比例

函数、极限和连续	约占 15%
一元函数微分学	约占 27%
一元函数积分学	约占 23%
多元函数微积分学初步	约占 17%
常微分方程初步	约占 10%
常数项级数	约占 8%

三、试卷题型比例

单项选择题	占 15 %
填空题	占 15 %
计算题	占 48 %
综合题	占 22 %

四、试卷难易度比例

试题按其难度分为容易题、中等题、难题，三种试题分值的比例为 4 : 4 : 2.

Ⅳ. 参考书目

1. 同济大学数学系编：《高等数学》（第七版）（上、下册），北京：高等教育出版社，2014 年。

2. 赵树嫄主编：《微积分》（第四版）［经济应用数学基础（一）］，北京：中国人民大学出版社，2016 年。

Ⅴ. 题型示例

一、单项选择题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+2 & (x>0) \\ a+\ln(1+x^2) & (x\leqslant 0) \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

2. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(e+x)-1$ 是 x 的

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 非等价的同阶无穷小　　D. 等价无穷小

3. 函数 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在区间［0，3］上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理确定的 $\zeta=$

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)(n\geqslant 1)$，则下列结论正确的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

5. 设 D 是由直线 $x=1$，$y=0$，$y=x$ 所围成的平面区域，则二重积分 $\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 4

二、填空题

6. 曲线 $y=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ 的水平渐近线为_____.

7. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$_____.

8. 设函数 $f(x)=xe^{-x}$，则 $f''(1)=$_____.

9. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_x^1\tan(t-1)\mathrm{d}t}{(x-1)^2}=$_____.

10. 微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解为 $y=$_____.

三、计算题

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$.

12. 计算不定积分 $\int\dfrac{x+3}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$.

13. 已知 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}(x>0)$，求一阶导数 y'.

14. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n+1}$ 的敛散性，其中常数 $a>0$.

15. 已知 $z=y^x$（$y>0$），求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

16. 求由曲线 $x^2+y^2=1$（$x>0$）及 $y^2=\dfrac{3}{2}x$ 所围成的图形绕 x 轴旋转产生的旋转体体积.

17. 计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是圆环：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$.

18. 求解微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x-y}$，$y\big|_{x=0}=\ln 2$.

四、综合题

19. 设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$，

（1）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）求 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值和最小值.

20. 已知 $f(\pi)=2$，且 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=5$，求 $f(0)$.