高等数学考试大纲

Ⅰ. 考试性质

普通高等学校本科插班生招生考试是由专科毕业生参加的选拔性考试. 高等学校根据考生的成绩，按已确定的招生计划，德、智、体全面衡量，择优录取. 因此，本科插班生考试应有较高的信度、较高的效度、必要的区分度和适当的难度.

本大纲适用于所有需要参加高等数学考试的各专业考生.

Ⅱ. 考试内容和要求

总体要求：考生应按本大纲的要求了解或理解“高等数学”中函数、极限和连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学初步、常微分方程初步和常数项级数的基本概念与基本理论，掌握或熟练掌握上述各部分的基本方法. 应理解各部分知识结构及知识的内在联系；应具有一定的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力；能运用基本概念、基本理论和基本方法，正确地判断和证明，准确地计算；能综合运用所掌握知识分析并解决简单的实际问题.

一、函数、极限和连续

（一）函数

1. 考试内容

（1）函数的概念：函数的定义，函数的表示法，分段函数.

（2）函数的简单性质：单调性、奇偶性、有界性、周期性.

（3）反函数.

（4）函数的四则运算与复合运算.

（5）基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

（6）初等函数.

2. 考试要求

（1）理解函数的概念，会求函数包括分段函数的定义域、表达式及函数值，并会作出简单的分段函数图象.

（2）掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性定义，会判断所给函数的相关性质.

（3）理解函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系（定义域、值域、图象），会求单调函数的反函数.

（4）掌握函数的四则运算与复合运算，熟练掌握复合函数的复合过程.

（5）掌握基本初等函数的简单性质及其图象.

（6）掌握初等函数的概念.

（二）极限

1. 考试内容

（1）数列和数列极限的定义.

（2）数列极限的性质：唯一性、有界性、四则运算定理、夹逼定理、单调有界数列极限存在性定理.

（3）函数极限的概念：函数在一点处的极限定义，左、右极限及其与极限的关系，趋于无穷大（$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时函数极限的定义，函数极限的几何意义.

（4）函数极限的性质：唯一性、夹逼定理、四则运算定理.

（5）无穷小量与无穷大量：无穷小量与无穷大量的定义，无穷小量与无穷大量的性质，两个无穷小量阶的比较.

（6）两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

2. 考试要求

（1）了解极限的概念（不要求用“$\varepsilon-N$”“$\varepsilon-\delta$”“$\varepsilon-X$”语言证明具体极限的存在性），掌握函数在一点处的左极限与右极限的概念，极限存在的充分必要条件.

（2）了解极限的有关性质，掌握极限的四则运算法则.

（3）理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质，会进行无穷小量阶的比较（高阶、低阶、同阶、等价）.

（4）熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

（三）连续

1. 考试内容

（1）函数连续的概念：函数在一点连续、左连续和右连续的定义，函数在一点连续的充分必要条件，函数的间断点及其分类.

（2）函数连续的性质：四则运算连续性、复合函数连续性.

（3）闭区间上连续函数的性质：有界性定理、最大值与最小值定理、介值性定理（含零点定理）.

（4）初等函数的连续性.

2. 考试要求

（1）理解函数在一点连续与间断的概念，掌握判断函数（含分段函数）在一点处连续的方法，理解函数在一点连续与极限存在之间的关系.

（2）会求函数的间断点并确定其类型（第一类间断点、第二类间断点）.

（3）理解在闭区间上连续函数的性质.

（4）理解初等函数在其定义区间上的连续性，并会利用函数连续性求极限.

二、一元函数微分学

（一）导数与微分

1. 考试内容

（1）导数概念：导数、左导数与右导数的定义，导数的几何意义，可导与连续的关系.

（2）导数的基本公式.

（3）求导方法：函数的四则运算求导法、复合函数的求导法、隐函数的求导法、对数

求导法、由参数方程所确定的函数的导数求法.

（4）高阶导数的定义，高阶导数的计算.

（5）微分的定义，微分与导数的关系，微分法则，一阶微分形式不变性.

2. 考试要求

（1）理解导数的概念及其几何意义，了解可导性与连续性的关系，会用定义求函数在一点处的导数.

（2）会求曲线上一点处的切线方程和法线方程.

（3）熟练掌握导数的基本公式、四则运算法则、反函数的求导法则以及复合函数的求导方法.

（4）掌握隐函数的求导法、对数求导法和由参数方程所确定的函数的导数求法.

（5）理解高阶导数的概念，会求函数的二、三阶导数.

（6）理解微分的概念，掌握微分法则，了解可微与可导的关系，会求函数的一阶微分.

（二）中值定理及导数的应用

1. 考试内容

（1）中值定理：罗尔（Rolle）中值定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理、柯西（Cauchy）中值定理.

（2）洛必达（L'Hospital）法则.

（3）函数单调性的判定法.

（4）函数极值与极值点、最大值与最小值.

（5）曲线的凹凸性、拐点.

（6）函数曲线的水平渐近线.

2. 考试要求

（1）了解罗尔中值定理、拉格朗日中值定理及其应用，了解柯西中值定理（知道定理的条件及结论）.

（2）熟练掌握应用洛必达法则求“$\frac{0}{0}$”“$\frac{\infty}{\infty}$”“$0\cdot\infty$”“$\infty-\infty$”“1^{∞}”“0^{0}”和“∞^{0}”型未定式极限的方法.

（3）掌握利用导数判定函数的单调性及求函数的单调区间的方法，会利用函数的单调性证明简单的不等式.

（4）理解函数极值的概念，掌握求函数的极值、最大值和最小值的方法，并会应用极值方法解应用题.

（5）会判定曲线的凹凸性，会求曲线的拐点.

（6）会求曲线的水平渐近线.

三、一元函数积分学

（一）不定积分

1. 考试内容

（1）原函数与不定积分的定义，不定积分的性质.

（2）基本积分公式.

（3）换元积分法：第一换元法（凑微分法）、第二换元法.

（4）分部积分法.

（5）一些简单有理函数的积分.

2. 考试要求

（1）理解原函数与不定积分的概念及其关系，掌握不定积分的性质.

（2）熟练掌握不定积分的基本公式.

（3）熟练掌握不定积分第一换元法，掌握第二换元法（仅限三角代换与简单的根式代换）.

（4）熟练掌握不定积分分部积分法.

（5）掌握简单有理函数的不定积分.

（二）定积分

1. 考试内容

（1）定积分的定义及其几何意义，可积条件.

（2）定积分的性质.

（3）定积分的计算：变上限的定积分，牛顿—莱布尼兹（Newton – Leibniz）公式，换元积分法，分部积分法.

（4）无穷区间的广义积分收敛和发散的概念.

（5）定积分的应用：平面图形的面积、旋转体的体积、平面曲线的弧长.

2. 考试要求

（1）理解定积分的概念与几何意义，了解函数连续是可积的充分条件.

（2）掌握定积分的基本性质.

（3）理解变上限的定积分是连续的被积函数的一个原函数，掌握对变上限定积分求导数的方法.

（4）掌握牛顿—莱布尼兹公式.

（5）掌握定积分的换元法与分部积分法.

（6）了解无穷区间广义积分的概念，并会进行计算.

（7）掌握直角坐标下用定积分计算平面图形的面积以及平面图形绕坐标轴旋转所生成的旋转体体积的方法.

（8）了解直角坐标下计算平面曲线弧长（含参数方程）的方法.

四、多元函数微积分学初步

1. 考试内容

（1）多元函数的概念：多元函数的定义，二元函数的定义域.

（2）偏导数与全微分：一阶偏导数，高阶偏导数，全微分.

（3）复合函数的偏导数，隐函数的偏导数.

（4）二重积分的概念，二重积分的性质，直角坐标及极坐标下二重积分的计算.

2. 考试要求

（1）理解多元函数的概念，会求二元函数的定义域，了解二元函数的几何意义.

（2）理解二元函数的一阶偏导数和全微分的概念，掌握二元函数的一阶偏导数及二阶偏导数的求法，掌握二元函数全微分的求法.

（3）掌握复合函数与隐函数的偏导数的求法.

（4）理解二重积分的概念，掌握二重积分的性质，掌握直角坐标及极坐标下二重积分的计算方法.

五、常微分方程初步

1．考试内容

（1）微分方程的基本概念.

（2）一阶微分方程：可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程.

（3）二阶常系数线性齐次方程.

2．考试要求

（1）了解微分方程的阶、解、通解、特解及初值条件等基本概念.

（2）会求可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程的通解及特解.

（3）会求二阶常系数线性齐次微分方程的通解及特解.

六、常数项级数

1．考试内容

（1）常数项级数的概念.

（2）收敛级数的基本性质.

（3）常数项级数的审敛法.

2．考试要求

（1）理解常数项级数收敛、发散及和的定义.

（2）掌握几何级数、调和级数及 p－级数的敛散性.

（3）理解收敛级数的基本性质.

（4）掌握正项级数的比较审敛法和比值审敛法.

Ⅲ. 考试形式及试卷结构

一、考试形式

闭卷，笔试，试卷满分为 100 分，考试时间为 120 分钟．考生使用答题卡答题.

二、试卷内容比例

函数、极限和连续	约占 15%
一元函数微分学	约占 27%
一元函数积分学	约占 23%
多元函数微积分学初步	约占 17%
常微分方程初步	约占 10%
常数项级数	约占 8%

三、试卷题型比例

单项选择题	占 15 %
填空题	占 15 %
计算题	占 48 %
综合题	占 22 %

四、试卷难易度比例

试题按其难度分为容易题、中等题、难题，三种试题分值的比例为 4：4：2.

Ⅳ. 参考书目

1. 同济大学数学系编：《高等数学》（第七版）（上、下册），北京：高等教育出版社.

2. 赵树嫄主编：《微积分》（第四版）［经济应用数学基础（一）］，北京：中国人民大学出版社.

Ⅴ. 题型示例

一、单项选择题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+2 & (x>0) \\ a+\ln(1+x^2) & (x\leqslant 0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

2. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(\mathrm{e}+x)-1$ 是 x 的

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 非等价的同阶无穷小　　D. 等价无穷小

3. 函数 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在区间［0，3］上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理确定的 $\zeta=$

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)(n\geqslant 1)$，则下列结论正确的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

5. 设 D 是由直线 $x=1$，$y=0$，$y=x$ 所围成的平面区域，则二重积分 $\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 4

二、填空题

6. 曲线 $y=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ 的水平渐近线为__________.

7. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$__________.

8. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$，则 $f''(1)=$__________.

9. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_x^1\tan(t-1)\mathrm{d}t}{(x-1)^2}=$__________.

10. 微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解为 $y=$__________.

三、计算题

11. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$.

12. 计算不定积分$\int\dfrac{x+3}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$.

13. 已知$y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}(x>0)$，求一阶导数$y'$.

14. 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n+1}$的敛散性，其中常数$a>0$.

15. 已知$z=y^x$（$y>0$），求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

16. 求由曲线$x^2+y^2=1$（$x>0$）及$y^2=\dfrac{3}{2}x$所围成的图形绕x轴旋转产生的旋转体体积.

17. 计算二重积分$\iint\limits_D\dfrac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域$D$是圆环：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$.

18. 求解微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x-y}$，$y|_{x=0}=\ln 2$.

四、综合题

19. 设$f(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$，

（1）求$f(x)$的单调区间和极值；

（2）求$f(x)$在闭区间$[0,2]$上的最大值和最小值.

20. 已知$f(\pi)=2$，且$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=5$，求$f(0)$.

重要考点一　极限

极限理论是微积分学的基础，微积分中的基本概念都是运用极限方法阐述的；

【思考】什么是极限？　　无限接近

【技巧】极限的计算思路

1.直接代入

2.处理之后再代入：约分、通分、分子有理化、分母有理化

3.套用公式

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}\infty, m>n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, m=n\\ 0, m<n\end{cases}$

（2）重要极限 1：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$或$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

►►等价无穷小替换：

在 $x\to0$ 时，常用的等价无穷小量：$\sin x\sim x$；$1-\cos x\sim x^2/2$；$\tan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$e^x-1\sim x$；$a^x-1\sim x\ln a$

（3）重要极限 2：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$　　“1^∞”

►►$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{c}{ax+b})^{mx+n}=e^{\frac{cm}{a}}$

4.洛必达法则：【$\dfrac{0}{0}$定理】设函数 $f(x),g(x)$满足条件：【$\dfrac{\infty}{\infty}$定理】

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$　　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；
- 在点 x_0 的某个去心邻域内 $f'(x)$与 $g'(x)$都存在，且 $g'(x)\neq0$；
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或无穷大；

则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。这种将分子、分母分别求导再求极限的方法称为洛必达法则。

使用洛必达法则时必须注意：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$必须是“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式；

（2）若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$还是“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式，且 $f'(x),g'(x)$仍满洛必达的其他条件，则可以继续使用洛必达法则。

（3）把定理中的 $x\to x_0$ 换成，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，定理仍然成立。

（4）形如“$0\cdot\infty$”，“$\infty-\infty$”，“1^∞”，“0^0”，“∞^0”等形式的，先将这些形式进行变形，变成“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，再用洛必达法则进行计算。

5.夹逼定理：设函数 $f(x),g(x),h(x)$在 x_0 的某个去心邻域内满足：

- 夹条件：$f(x)\le g(x)\le h(x)$
- 逼条件：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$

重要考点二 连续

【思考】什么是连续？什么是函数的连续？

连续，不间断，无缝连接。

►►函数在某点连续的充要条件：左连续+右连续；或 极限存在且极限=该点的函数值；或 左极限=右极限=该点的函数值。

【金句】连续：

间断点

若函数 $f(x)$在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$的间断点。

- 第一类间断点：左、右极限均存在，但不连续的间断点。其中：
  - 左右极限相等时，这样的间断点为可去型间断点；
  - 左右极限存在但不相等，这样的间断点为跳跃型间断点。
- 第二类间断点：左右极限中至少有一个不存在的间断点。
  - 无穷间断点
  - 震荡间断点

重要考点三 导数

一、导数的定义

函数 $f(x)$的导数，记作 $f'(x)$或 dy/dx 或 $df(x)/dx$ 或 y'。

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

（1）$f(x)$在 x_0 处可导的充要条件是“$f(x)$在 x_0 处左可导+右可导且 $f_-'(x_0)=f_+'(x_0)=f'(x_0)$”。

（2）可导与连续的关系：$f(x)$在 x_0 处可导是 $f(x)$在 x_0 处连续的充分非必要条件。

（3）导数的几何意义：导数表示函数 $f(x)$在某点的瞬间变化程度，即切线的斜率。

【金句】

二、导数的运算

1.基本导数公式【★】

$c'=$	$(x^n)'=$
$(a^x)'=$	$(\log_a x)'=$
$(e^x)'=$	$(\ln x)'=$
$(\sin x)'=$	$(\arcsin x)'=$
$(\cos x)'=$	$(\arccos x)'=$
$(\tan x)'=$	$(\arctan x)'=$

2.四则运算：若函数 $f(x),g(x)$均可导，则其和、差、积、商构成的函数亦可导。且：

- $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
- $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 【★】
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ 【★】

3.复合函数的导数【★】

【金句】

链式求导法。

4.高阶导数

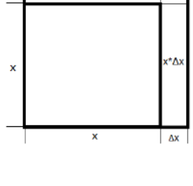
【金句】

先算一阶导数 $f'(x)$，再算二阶导数 $f''(x)$，……，直到 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$，并找规律。

5.隐函数的导数【★】

【金句】 （+对数求导法）

6.微分：【思考】导数表示了函数中每点的斜率，那么微分表示什么呢？



函数 $y=f(x)=x^2$，如左图。正方形的边长 x 增加了 Δx，面积 y 增加了 $\Delta y=2x\Delta x+\Delta x\Delta x$。我们把其中的 $2x\Delta x$ 称为该函数的微分：$dy=2x\Delta x$。

（1）微分表示自变量 x 的改变带来的因变量 y 的近似改变。【因变量的变动与自变量变动必须是线性关系（一次项关系）。】

（2）一元函数的可导性和可微性是等价的：$dy/dx=f'(x)\rightarrow dy=f'(x)dx$

【金句】

重要考点四 导数的应用

一、微分中值定理

1.罗尔定理（Rolle）：若函数 $f(x)$满足条件：

- 在闭区间$[a,b]$上连续；
- 在开区间(a,b)内可导；
- $f(a)=f(b)$；则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。导数 $f'(x)$等于 0 的点称为函数 $f(x)$的驻点。

【几何意义】满足这三个条件的曲线上，至少有一个点的切线与 x 轴平行。

二、拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$满足条件：

- 在闭区间$[a,b]$上连续；
- 在开区间(a,b)内可导；则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

♥♥罗尔定理可以看作是拉格朗日中值定理的特殊形式。

二、导数的应用

1.洛必达法则：不定式极限的一种有效方法——见极限的计算

2.函数单调性的判断【单调性判定定理】

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导：【证明】

- 若在(a,b)内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上单调递增；
- 若在(a,b)内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上单调递减。

►►判定函数 $f(x)$单调性的步骤：

（1）确定函数 $f(x)$的定义域；
（2）求 $f'(x)$，找出 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$不存在的点，这些点将定义域分成若干小区间；
（3）列表，由 $f'(x)$在各个小区间的符号确定函数 $f(x)$的单调性。

【金句】

3.函数极值的计算：极值是函数在某个值附近的局部取值：极大值和极小值

计算函数极值的步骤

（1）确定函数 $f(x)$的定义域；
（2）求 $f'(x)$，找出定义域内 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$不存在的点，将定义域分成若干小区间；
（3）列表，由 $f'(x)$在上述点两侧的符号，确定其是否为极值点，以及判别是极大值点还是极小值点；

〖第一充分条件：$f(x)$在点处 x_0 附近连续且可导：

- 在点 x_0 左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，x_0 为极大值点；
- 在点 x_0 左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，x_0 为极小值点；
- 在点 x_0 两侧 $f'(x)$不变号，x_0 不是极值点。

第二充分条件：$f(x)$在点处 x_0 有二阶导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$：

- 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$在 x_0 处取极大值；
- 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$在 x_0 处取极小值。 〗

（4）求出极值。

【金句】

4.函数最值的计算：指函数在某区间上的最大值和最小值。

最值在极端值点、导数不存在的点、区间端点处。

计算步骤：连续函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最值

（1）求 $f(x)$在(a,b)内 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$不存在的点 $x_1,x_2,x_3,...,x_n$；

（2）计算函数值 $f(a),f(x_1),f(x_2),....,f(x_n),f(b)$；

（3）函数值 $f(a),f(x_1),f(x_2),....,f(x_n),f(b)$中最大的为最大值，最小的为最小值。

【金句】

5.曲线的凹凸性和拐点

（1）方法一：定义法：弦总位于这两点的弧段上方，则称该曲线是凹性的；弦总位于弧下方，则称该曲线是凸性的。

（2）方法二：一阶导数法

若 $f(x)$在区间(a,b)内具有一阶导数，

- 若曲线 $y=f(x)$位于其每一点处切线的上方，则函数 $f(x)$在区间(a,b)内是凹的；
- 若曲线 $y=f(x)$位于其每一点处切线的下方，则函数 $f(x)$在区间(a,b)内是凸的。

（3）方法三：二阶导数法

若 $f(x)$在区间(a,b)内具有二阶导数，

- 若当 $x\in(a,b)$时 $f''(x)>0$，则曲线 $f(x)$在区间(a,b)内是凹的；
- 若当 $x\in(a,b)$时 $f''(x)<0$，则曲线 $f(x)$在区间(a,b)内是凸的。

==>拐点：在曲线上，若某点的两侧有不同的凹凸性，则称该点为该曲线的拐点。

若 x_0 是 $f(x)$的拐点，则 $f''(x_0)=0$。

根据拐点的定义，结合凹凸性的判断，若 $f(x)$在 x_0 的邻域内具有二阶导，且 $f''(x_0)=0$，$f''(x)$在 x_0 两侧异号，则（x_0，$f(x_0)$）是曲线 $f(x)$的拐点；此外，$f''(x_0)$不存在的点，也可能是曲线 $f(x)$的拐点。

曲线凹凸性与拐点判别的步骤

（1）确定函数的定义域；

（2）求 $f''(x)$，并找出 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$不存在的点，这些点将定义域分成若干个小区间。

（3）列表，由 $f''(x)$在上述点两侧的符号确定曲线的凹凸性与拐点。

【金句】

六、曲线的渐近线

1.水平渐近线

【金句】

2.垂直渐近线

【金句】

重要考点五 不定积分

【金句】不定积分是导数的逆运算

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

1.不定积分的基本性质

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad k \neq 0$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$[\int f(x)dx]' = f(x) \text{或} d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

$$\int F'(x)dx = F(x)+C$$

2.基本积分公式

$\int kdx =$	$\int x^n dx =$
$\int a^x dx =$	$\int \frac{1}{x}dx =$
$\int \sin xdx =$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx =$
$\int \cos xdx =$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx =$	

3.换元积分法

（1）第一换元积分法：又称“凑微分法”。是**导数复合运算的逆运算。从里往外凑。**

设函数 $f(u)$有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，则：$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C$

（2）第二换元积分法——**真正的换元法**

设函数 $x=\psi(t)$单调、可导，且 $\psi'(t)\neq 0$。又设 $g[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数 $G(t)$，则：

$$\int g(x)dx = G[\psi^{-1}(x)]+C$$

此方法是引入变量 t（t 可用 x 来表示），将计算 x 的积分转化成计算 t 的积分。

4.分部积分法：是导数乘法的逆运算

设函数 $u=u(x)$,$v=v(x)$的导数都存在且连续，则：$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$

重要考点六 定积分

【金句】

一、定积分——函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上与 x 轴围城的面积：记作$\int_a^b f(x)dx$。

1.计算平面图形的面积

2.计算旋转体的体积

二、定积分的计算

【金句】

牛顿-莱布尼茨公式：设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$F(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

-积分上限函数$\int_a^x f(t)dt$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数；

-积分下限函数$\int_x^b f(t)dt$是- $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数；

重要考点七 多元函数

多个自变量

【金句】

一、二元函数的极限——与一元函数类似

二、二元函数的连续——与一元函数类似

三、二元函数的导数与微分——与一元函数类似

1.偏导数

【金句】

$z=f(x,y)$关于 x 的偏导函数： f'_x或z'_x或$\frac{\partial f}{\partial x}$或$\frac{\partial z}{\partial x}$

$z=f(x,y)$关于 y 的偏导函数： f'_y或z'_y或$\frac{\partial f}{\partial y}$或$\frac{\partial z}{\partial y}$

2.二阶偏导数

z 对 x 的二阶偏导，记作： $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$或 $f''_{xx}(x,y)$或 z''_{xx}

z 对 y 的二阶偏导为： $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$或 $f''_{yy}(x,y)$或 z''_{yy}。

若 z 对先 x 后 y 求导数，得到的二阶偏导数称为二阶混合偏导，记作$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$或 $f''_{xy}(x,y)$或 z''_{xy}

同理，有 z 对先 y 后 x 的二阶混合偏导，记作： $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$或 $f''_{yx}(x,y)$或 z''_{yx}

可以证明得到， $z''_{xy}=z''_{yx}$ ，即二阶混合偏导的值与求导顺序无关。

3.全微分

【思考】一元函数 $y=f(x)$的微分表示：x 的增量 Δx 带来的因变量的改变量 Δy（Δy 只与 Δx 的一次项相关）的近似值 dy。且 $dy=f'(x)dy$。

类似的，多元函数的全微分表示什么呢？

以二元函数的全微分为例：

与一元函数的全微分类似：二元函数 $z=f(x,y)$的全微分应表示自变量的增量带来的因变量变动的近似值 dz。那么：$dz=$？

►►►即：二元函数 $z=f(x,y)$的全微分表示函数自变量的变动 $\Delta x,\Delta y$，带来的因变量 z 的近似改变 dz。

且可以证明得到：$dz=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$

$=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

4.多元复合函数的求导法则

5.二元隐函数的求导法则——与一元隐函数的求导类似

6.二元函数的极值、最值——与一元函数的极值最值类似。

（1）极值：【极值存在的<u>必要条件</u>】设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值，且函数在该点的一阶偏导数存在，则 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$

【极值存在的<u>充分条件</u>】设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内有连续的二阶偏导数，且点 (x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点，记：$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

- 当 $B^2-AC<0$，且 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极大值；
- 当 $B^2-AC<0$，且 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值；
- 当 $B^2-AC>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值。

（2）最值：最值在函数的极值、端点值和驻点上取得。

三、二元函数的积分——二重积分

函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的积分记为：$\iint_D f(x,y)d\sigma$。

二重积分的计算，可以归化为两个有序的定积分，即二次积分：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(x,y)dxdy$$

【金句】

重要考点八 常微分方程初步

微分方程是指含有微分的方程，由于微分和导数可以互相表达，因此，含有导数的方程也可以成为微分方程。

- 阶：指方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数；
- 解：指满足微分方程的函数；
- 通解：指满足微分方程的所有函数，其常包含常数 C，且常数的个数等于方程的阶数；
- 特解：指满足微分方程的所有解的其中一个解；特解常可以通过一个条件来确定，我们把这样的条件称为定解条件（或初始条件）。

在实际中，方程的形式是复杂多样的，我们这里只讨论三种特殊的微分方程：

一、可离变量的微分方程

可离变量的微分方程是指可写成：$g(y)dy=f(x)dx$ 的微分方程。

【求解方法】分离变量法：将微分方程表达称以上标准形式之后，在方程两边直接计算积分：$\int g(y)dy=\int f(x)dx$，即可解出 x 与 y 的关系式。

二、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程是指可写成：$a(x)y'+b(x)y=c(x)$的微分方程。（$a(x),b(x),c(x)$为已知函数）

- $c(x)=0$ 时，该微分方程称为一阶齐次线性微分方程 $a(x)y'+b(x)y=0$，常表示成：$y'+P(x)y=0$
- $c(x)\neq 0$ 时，该微分方程称为一阶非齐次线性微分方程 $a(x)y'+b(x)y=c(x)$，常表示成：$y'+P(x)y=Q(x)$

1.一阶齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解

$y'+P(x)y=0$ 可用分离变量法写成：$dy/dx+P(x)y=0$　<=>　$dy/y=-P(x)dx$

两边不定积分：$\int dy/y=\int -P(x)dx$。得 $\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln C_1$

即通解为：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

2.一阶非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$的通解

设 $y'+P(x)y=Q(x)$的通解为：$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$，两边求导：$y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}$，代入原方程，得：$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$，两边不定积分：$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$。

所以：一阶非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$的通解为：$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$

三、二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解及特解：【步骤】

1.写出微分方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$.

2.求出特征方程的两个根 r_1，r_2.

3.根据特征根的不同，按下表写出微分方程的通解。

r_1，r_2 的情况	通解
两不等实根 r_1，r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两相同实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

重要考点九 常数项级数的收敛性

一、数列

二、常数项无穷级数：数列无穷项的和

三、常数项无穷级数的收敛性：数列无穷项的和的收敛性

- 数列无穷项的和的极限存在——收敛
- 数列无穷项的和的极限不存在——发散

专插本《高等数学》参考题（解析版）

一、选择题

1. 函数 $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{x^2-16}}$ 的定义域为（　　）

A. $(-2,+\infty)$　　B. $(4,+\infty)$　　C. $(-2,4)$　　D. $(-4,4)$

答案：B

解析：由题意可知 $\begin{cases} x+2>0 \\ x^2-16>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>4\text{或}x<-4 \end{cases} \Rightarrow x>4$.

2. 设 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=f(x)(2^x+2^{-x})$ 为（）

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 无法判断奇偶性

答案：B

解析：令 $h(x)=2^x+2^{-x}$，由于 $h(-x)=2^{-x}+2^x=h(x)$，所以 $h(x)$ 为偶函数，又因为 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $F(x)=f(x)(2^x+2^{-x})=f(x)h(x)$ 是奇函数.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+2x^3-x+1, x\neq 0 \\ k, x=0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 k 为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 任意常数

答案：C

解析：由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可知，$f(x)$ 在点 x=0 处是连续的，则有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，由于

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x+2x^3-x+1)=2, f(0)=k$，故 k=2

4. 对于函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x(x-2)}$，以下结论中正确的是（　）

A. x=0 是第一类间断点，x=2 是第二类间断点　　B. x=0 是第二类间断点，x=2 是第一类间断点

C. x=0 是第一类间断点，x=2 是第一类间断点　　D. x=0 是第二类间断点，x=2 是第二类间断点

答案：B

解析：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x}=\infty$，所以 x=0 是第二类间断点；

由于 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x}=2$，所以 x=2 是第一类间断点

5. 设函数 $f(x)=\ln(x^2+1)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（ ）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -2

答案：B

解析：因为 $f'(x)=\left[\ln(x^2+1)\right]'=\dfrac{2x}{x^2+1}$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)=\dfrac{2}{1+1}=1$.

6. 若直线 $y=5x+m$ 是曲线 $y=x^2+3x+2$ 的一条切线，则常数 m=（ ）

A. 0　　B. 1　　C. 5　　D. 6

答案：B

解析：设切点 $M(x_0,y_0)$，在 M 点处切线的斜率 $k_{切}=y'\big|_{x=x_0}$，由于 $y'=(x^2+3x+2)'=2x+3$，所以切线斜率 $k_{切}=y'\big|_{x=x_0}=2x_0+3=5$，得到 $x_0=1$，将 $x_0=1$ 代入到曲线 $y=x^2+3x+2$ 中，得到 $y_0=6$.

由于切点 M(1,6)在切线方程 $y=5x+m$ 上，所以 $6=5\times1+m\Rightarrow m=1$.

7. 设 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int xf(ax^2+b)dx=$（ ）

A. $F(ax^2+b)+C$　　B. $\dfrac{1}{2a}F(ax^2+b)$　　C. $\dfrac{1}{3}F(ax^2+b)+C$　　D. $\dfrac{1}{2a}F(ax^2+b)+C$

答案：D

解析：$\int xf(ax^2+b)dx=\dfrac{1}{2a}\int f(ax^2+b)d(ax^2+b)=\dfrac{1}{2a}F(ax^2+b)+C$.

8. 若 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$（ ）

A. $\dfrac{\ln x}{2}(2+\ln x)+C$　　B. $x+\dfrac{x^2}{2}+C$　　C. $x+e^x+C$　　D. $e^x+\dfrac{e^{2x}}{2}+C$

答案：C

解析：令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$，则 $f'(t)=1+e^t\Rightarrow\int f'(t)dt=\int(1+e^t)dt\Rightarrow f(t)=e^t+t+C$

所以 $f(x)=x+e^x+C$

9. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{k}{1+x^2}dx=1$，其中 k 为常数，则 k=（ ）

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{2}{\pi}$

答案：D

解析：$\because\int_0^{+\infty}\dfrac{k}{1+x^2}dx=k\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx=k\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}k\quad\therefore\dfrac{\pi}{2}k=1\quad\therefore k=\dfrac{2}{\pi}$.

10. 下列级数中发散的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$

答案：C

解析：对于 C 选项，由于$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1\neq 0$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$发散.

二、填空题

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin 2\sqrt{t}dt}{x^3}=$______

答案：$\frac{4}{3}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin 2\sqrt{t}dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\arcsin 2\sqrt{t}dt\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\arcsin 2\sqrt{x^2}\cdot 2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x\cdot 2x}{3x^2}=\frac{4}{3}$

12. 当$h\to 0$时，$f(x_0+3h)-f(x_0-h)+2h$是 h 的高阶无穷小，则$f'(x_0)=$________

答案：$-\frac{1}{2}$

解析：由题意可知$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)+2h}{h}=0$，

由于$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)+2h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{h}+2$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{4h}\cdot 4+2=4f'(x_0)+2$

所以$4f'(x_0)+2=0$，即$f'(x_0)=-\frac{1}{2}$

13. 如果$f(x)=x^2+kx+3$在区间$[-1,3]$上满足罗尔定理条件，则 k=_________

答案：2

解析：本题主要考察罗尔定理的条件，罗尔定理的三个条件：①$f(x)=x^2+kx+3$在区间$[-1,3]$上连续；

②$f(x)=x^2+kx+3$在区间$(-1,3)$内可导；③$f(-1)=f(3)$.

由第 3 个条件可知：$f(-1)=f(3)\Rightarrow 4-k=12+3k\Rightarrow k=-2$

14. $f(x)=x^3-x$在区间$[1,4]$上满足拉格朗日定理条件，则ξ=_________

答案：$\sqrt{7}$

解析：本题主要考察拉格朗日定理的结论件．$f'(x)=(x^3-x)'=3x^2-1$，由于 $f(x)=x^3-x$ 在区间 $[1,4]$ 上满足拉格朗日定理条件，则有 $f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{(4^3-4)-(1^3-1)}{3}=3\xi^2-1$，所以有 $\xi=\sqrt{7}$ 或 $\xi=-\sqrt{7}$（舍），综上 $\xi=\sqrt{7}$

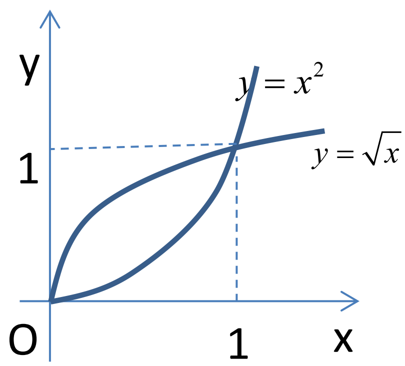
15. 设点(1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 a=_______,b=______.

答案：$-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}$

解析：$y'=\left(ax^3+bx^2\right)'=3ax^2+2bx, y''=\left(3ax^2+2bx\right)'=6ax+2b$，由于点(1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，所以 $\begin{cases}a+b=3\\6a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{9}{2}\end{cases}$

16. 由曲线 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围成的图形绕 Ox 轴旋转一周所得旋转体的体积为________

答案：$\dfrac{3\pi}{10}$



解析：本题主要考察绕 x 轴旋转的旋转体的体积，其中积分变量为 x，且 $0\le x\le 1$.

$$V_x=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx-\pi\int_0^1(x^2)^2dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$$

17. 设 $D:x^2+y^2\le 1$，则 $\iint\limits_D\sqrt[5]{x^2+y^2}\,d\sigma=$_________

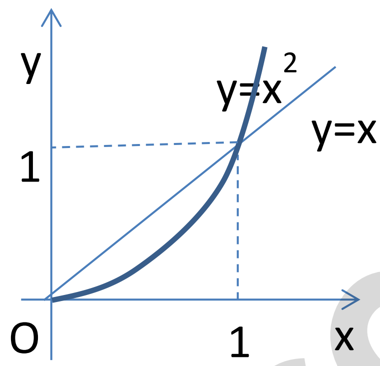
答案：$\dfrac{5\pi}{6}$

解析：积分区域为圆形域，首选极坐标形式计算二重积分.

$$\because 积分区域为x^2+y^2\le 1\qquad \therefore 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1$$

$$\therefore\iint\limits_D\sqrt[5]{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt[5]{r^2}\cdot rdr=2\pi\cdot\int_0^1 r^{\frac{7}{5}}dr=2\pi\cdot\frac{5}{12}r^{\frac{12}{5}}\Big|_0^1=\frac{5}{6}\pi$$

18. 交换二次积分次序 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx =$________



答案：$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

解析：$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ 中积分区域为 Y—型区域：

$\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ y\le x\le \sqrt{y} \end{cases}$，积分区域如右图所示.

交换积分次序，积分区域为 X—型区域：

$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^2\le y\le x \end{cases}$，所以 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

19. 设方程 $xy+xz+yz=0$ 所确定的隐函数为 $z=z(x,y)$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} =$__________

答案：-1

解析：令 $F(x,y,z)=xy+xz+yz$，且当 $x=0, y=1$ 时，z=0，则

$$F_x=\left[xy+xz+yz\right]_x^{'}=y+z, F_z=\left[xy+xz+yz\right]_z^{'}=x+y\ ,$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{y+z}{x+y} \qquad \therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1$$

20. 函数 $z=x^2y+y^2$ 在点(2,1)处的全微分，则 $\left.dz\right|_{\substack{x=2\\y=1}} =$__________

答案：$4dx+6dy$

解析：$\because \frac{\partial z}{\partial x}=\left[x^2y+y^2\right]_x^{'}=2xy, \frac{\partial z}{\partial y}=\left[x^2y+y^2\right]_y^{'}=x^2+2y$

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=4, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=6$$

$$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=4dx+6dy$$

21. 设 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ 为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该微分方程为________

答案：$y^{''}-5y^{'}+6y=0$

解析：由微分方程的通解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ 可知对应的特征方程的特征根为 $r_1=2,r_2=3$，对应的特征方程为 $(r-2)(r-3)=0$，即 $r^2-5r+6=0$，所以原微分方程为 $y''-5y'+6y=0$

22. $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}$ 的通解是______

答案：$y=-\frac{1}{2x}+Cx$

解析：原微分方程可以化为 $y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}$，令 $P(x)=-\frac{1}{x},Q(x)=\frac{1}{x^2}$，代入公式：

$$y=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{1}{x^2}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{1}{x^2}e^{-\ln x}dx+C\right]=e^{\ln x}\left[\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}dx+C\right]$$

$$=x\left[\int\frac{1}{x^3}dx+C\right]=-\frac{1}{2x}+Cx$$

三、计算题

23. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x\cdot\sin^2 x}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ (无穷小的替换)

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-x)'}{(x^3)'}\text{(洛必达法则)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}\text{(无穷小的替换)}$$

$$=\frac{1}{3}$$

24. 已知 a,b 为常数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+5}{3x+2}=5$，求 a,b 的值.

解：$\because\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+5}{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(ax^2+bx+5)'}{(3x+2)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax+b}{3}=5$

$$\therefore\begin{cases}\frac{2a}{3}=0\\ \frac{b}{3}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=15\end{cases}$$

25. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}, x<0\\ 1, x=0\\ \dfrac{b\sin x+\int_0^x \cos t^2 dt}{x}, x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，试求常数 a,b.

解析：本题主要考察连续的三个条件.

解：由于 $f(x)$ 在 x=0 处连续，所以 $f(x)$ 满足：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$

$$\because \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{x^2}=\frac{1}{2}a^2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{b\sin x+\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(b\sin x+\int_0^x \cos t^2 dt\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}(b\cos x+\cos x^2)=b+1$$

$$又\because \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

$$\therefore \begin{cases}\frac{1}{2}a^2=1\\ b+1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm\sqrt{2}\\ b=0\end{cases}$$

26. 设 $y=x^{x^2}(\mathrm{x}>0)$，则 y'.

解析：先两边同时取对数，再用隐函数求导法.

解：两边同时取对数可得：$\ln y=\ln x^{x^2}=x^2\ln x$，再令 $F(x,y)=\ln y-x^2\ln x$，则有

$$F_x(x,y)=\left[\ln y-x^2\ln x\right]_x'=-2x\ln x-x$$

$$F_y(x,y)=\left[\ln y-x^2\ln x\right]_y'=\frac{1}{y}$$

$$所以\ y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{-2x\ln x-x}{\frac{1}{y}}=x(2\ln x+1)\cdot y=(2\ln x+1)\cdot x^{x^2+1}$$

27. 计算定积分 $\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$.

解析：采用分部积分法，选取 $u=\ln(x+1), v'=1$.

解：$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx=x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx=e-1-\int_0^{e-1}(1-\frac{1}{x+1})dx$

$$=e-1-\int_0^{e-1}1dx+\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx=e-1-(e-1)+\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}=1$$

28. 求不定积分$\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$

解：$\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

29. 设$z=f(x+y,x^2)$，且f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：令$u=x+y,v=x^2$，则$z=f(u,v)$，

且$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x+y\right)_x^{'}=1,\frac{\partial v}{\partial x}=\left(x^2\right)_x^{'}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x+y\right)_y^{'}=1,\frac{\partial v}{\partial y}=\left(x^2\right)_y^{'}=0$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u\cdot 1+f_v\cdot 2x=f_u+2xf_v$$

$$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_u+2f_v\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_u\right)+2x\frac{\partial}{\partial y}\left(f_v\right)$$

$$=(\frac{\partial f_u}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+2x(\frac{\partial f_v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_v}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})=f_{uu}+2xf_{vu}$$

30. 求$z=e^x\cos(x+y)$的全微分.

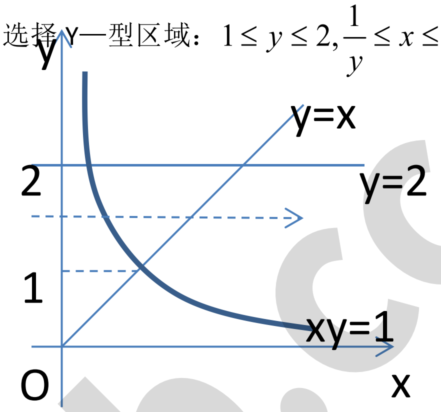
解：$\because\frac{\partial z}{\partial x}=\left[e^x\cos(x+y)\right]_x^{'}=e^x\cos(x+y)-e^x\sin(x+y)=e^x[\cos(x+y)-\sin(x+y)]$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[e^x\cos(x+y)\right]_y^{'}=-e^x\sin(x+y)$$

$$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=e^x[\cos(x+y)-\sin(x+y)]dx-e^x\sin(x+y)dy$$

31. 求 $\iint\limits_D \frac{x}{y}d\sigma$，其中 D 是由 $y=x$，$xy=1$ 及 $y=2$ 围成.

解析：采用直角坐标法下计算二重积分，积分区域 D 如右图所示，选择 Y—型区域：$1\le y\le 2,\frac{1}{y}\le x\le y$.

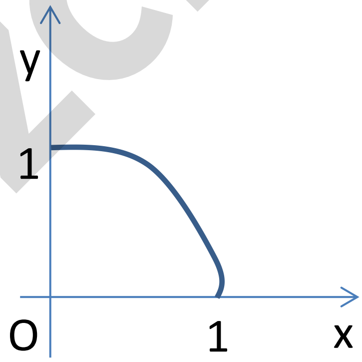


解：$\iint\limits_D \frac{x}{y}d\sigma=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{x}{y}dx=\int_1^2\frac{1}{y}dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}xdx$

$$=\int_1^2\frac{1}{2}(y-\frac{1}{y^3})dy=(\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4y^2})\Big|_1^2=\frac{9}{16}$$

32. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D 5x^2ydxdy$，其中 D 是由 $x=0,y=0$，与 $x^2+y^2=1$ 所围成的位于第一象限内的图形.

解析：积分区域为圆形域，可选极坐标形式计算二重积分.



解：由于 D 是由 $x=0,y=0$，与 $x^2+y^2=1$ 所围成的位于第一象限内的图形，故积分区域化为极坐标形式为：

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 1$

所以 $I=\iint\limits_D 5x^2ydxdy$

$$I=\iint\limits_D 5x^2ydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 5(r\cos\theta)^2 r\sin\theta\cdot rdr=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\cdot\int_0^1 r^4dr$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d(\cos\theta)\times r^5\Big|_0^1=-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

说明：本题也可以采用直角坐标法计算，积分区域看成 X—型区域：$0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{1-x^2}$，则

$$I=\iint\limits_D 5x^2ydxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}5x^2ydy=\frac{1}{3}.$$

33. 求 $y''-5y'+6y=0$ 满足 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=4$ 的特解.

解析：微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 对应的特征方程为 $r^2-5r+6=0$，解得特征根为 $r_1=2,r_2=3$，故原微分方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.则 $y'=\left(C_1e^{2x}+C_2e^{3x}\right)'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}$.

将初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y^{'}\big|_{x=0}=4$ 代入，即 $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ 2C_1+3C_2=4 \end{cases}$，解得 $C_1=-1, C_2=2$，故满足初始条件的特解为 $y=-e^{2x}+2e^{3x}$

34. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 的敛散性

解：因为 $\frac{n}{2n+1}<\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$，所以 $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 是收敛的.故由比较审敛法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 也是收敛的.

35. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!\cdot\cos na}{n^n}(a>0)$ 的敛散性

解：因为 $\left|\cos na\right|\le 1$，所以 $\left|\frac{2^n\cdot n!\cdot\cos na}{n^n}\right|\le\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 的敛散性.由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{1}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!\cdot\cos na}{n^n}(a>0)$ 收敛.

四、综合题

36. 已知 $f(x)=x^5-3x-1$，求：

⑴函数 $f(x)$ 的凹凸区间；　　⑵证明方程 $f(x)=0$ 在(1,2)内至少有一个实根.

解：(1) $f^{'}(x)=(x^5-3x-1)^{'}=5x^4-3, f^{''}(x)=(5x^4-3)^{'}=20x^3$，

令 $f^{''}(x)=0$，得 $x=0$.

当 $x>0$ 时，$f^{''}(x)>0$；当 $x<0$ 时，$f^{''}(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的凹区间为 $(0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,0)$.

(2)由 $f(x)=x^5-3x-1$ 可知 $f(x)$ 在区间[1,2]上连续.又因为

$f(1)=-3<0, f(2)=25>0$，即 $f(1)\cdot f(2)<0$，

由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=0$，

即方程 $f(x)=0$ 在(1,2)内至少有一个实根.

37. 设 $F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$，试求：

⑴F(x)的极值；

⑵曲线 $y=F(x)$ 的拐点的横坐标

⑶ $F(x)=\int_{-2}^{3} x^2F'(x)dx$.

解：(1) $F'(x)=\left(\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt\right)'=e^{-x^4}\cdot(x^2)'=2xe^{-x^4}$，令 $F'(x)=0$，得驻点 $x=0$.

$\because F''(x)=\left(2xe^{-x^2}\right)'=2e^{-x^4}+2xe^{-x^4}(-x^4)'=2e^{-x^4}-8x^4e^{-x^4}$

$\therefore F''(0)=2>0$　　$\therefore F(x)$的极小值为$F(0)=0$

(2) 由(1)可知：$\because F''(x)=2e^{-x^4}-8x^4e^{-x^4}=2(1-4x^4)e^{-x^4}$

令 $F''(x)=0$，即 $2e^{-x^4}-8x^4e^{-x^4}=0$，得到 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

在 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的两侧 $F''(x)$ 是变号的，所以 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 均为拐点的横坐标.

⑶ $F(x)=\int_{-2}^{3}x^2F'(x)dx=\int_{-2}^{3}x^2 2xe^{-x^4}dx=2\int_{-2}^{3}x^3e^{-x^4}dx=-\dfrac{1}{2}\int_{-2}^{3}e^{-x^4}d(-x^4)=-\dfrac{1}{2}e^{-x^4}\Big|_{-2}^{3}$

$=-\dfrac{1}{2}(e^{-81}-e^{-16})=\dfrac{1}{2}(e^{-16}-e^{-81})$

专插本《高等数学》模拟题（解析版）

一、选择题

1. 当$x \to 0$时，$x^2-\sin x$是关于x的（　　）

A. 高阶无穷小　　　　B. 同阶但非等价无穷小

C. 低阶无穷小　　　　D. 等价无穷小

答案：B

解析：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{\sin x}{x}\right)=-1$

$\therefore$ $x^2-\sin x$与x是同阶但非等价无穷小

2. 设函数$f(x)$在$x=1$处可导，且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$，则$f'(1)=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $-\dfrac{1}{4}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

答案：C

解析：由于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x}\cdot(-2)=-2f'(1)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f'(1)=-\dfrac{1}{4}$

3. 下列函数中在$[-1,1]$上满足罗尔定理条件的是（ ）

A. $y=\ln(1-x^2)$　　B. $y=|x|$　　C. $y=\sqrt[3]{x^2-1}$　　D. $y=\sqrt[3]{x+1}$

答案：C

解析：A. $y=\ln(1-x^2)$,由于$y(1)=y(-1)=\ln(1-1)=\ln 0$，无意义，所以不满足$y=\ln(1-x^2)$在$[-1,1]$上连续的要求.

B. $y=|x|$在 x=0 处不可导，所以不满足$y=|x|$在$(-1,1)$内可导的要求.

D. $y=\sqrt[3]{x+1}$，由于$y(-1)=0\neq y(1)=\sqrt[3]{2}$，所以不满足第三个条件.

4. 设$\int f(x)dx=F(x)+C$，则$\int xf(ax^2+b)dx=$（　　）

A. $F(ax^2+b)+C$　　B. $\dfrac{1}{2a}F(ax^2+b)$　　C. $\dfrac{1}{3}F(ax^2+b)+C$　　D. $\dfrac{1}{2a}F(ax^2+b)+C$

答案：D

解析：$\int xf(ax^2+b)dx=\dfrac{1}{2a}\int f(ax^2+b)d(ax^2+b)=\dfrac{1}{2a}F(ax^2+b)+C$.

5. 下列级数中收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

答案：D

解析：由于 $\left|(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right|\le\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛.

二、填空题

6. 函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=at^2\\y=bt^3\end{cases}$ 所确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$__________

答案：$\frac{3b}{4a^2}$

解析：由于 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(bt^3)_t'}{(at^2)_t'}=\frac{3bt^2}{2at}=\frac{3bt}{2a}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{3bt}{2a}\right)_t'}{(at^2)_t'}=\frac{\frac{3b}{2a}}{2at}=\frac{3b}{4a^2t}$$

所以 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=\frac{3b}{4a^2t}\Big|_{t=1}=\frac{3b}{4a^2}$

7. 二阶齐次微分方程 $y''-6y'+13y=0$ 的通解为______________

答案：$y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

解析：微分方程 $y''-6y'+13y=0$ 对应的特征方程为：$r^2-6r+13=0$，解得：

$$r_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times13}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16i^2}}{2}=\frac{6\pm4i}{2}=3\pm 2i$$

可令 $\alpha=3,\beta=2$，则有微分方程的通解为 $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

8. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{px}=e^{-2}$，则 p=______

答案：$\frac{3}{2}$

解析：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{px}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{3}{x}\right)\right]^{-\frac{x}{3}\cdot(-3p)}=e^{-3p}=e^{-2}$，所以 $p=\frac{2}{3}$；

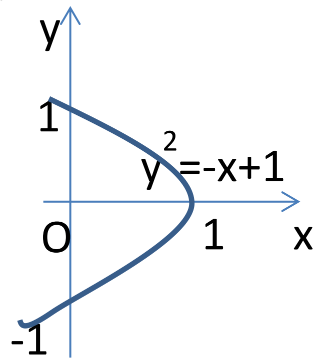
9. 曲线 $y=\frac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的水平渐近线__________，铅垂渐近线___________

答案：$y=-2,x=0$

解析：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2$，所以水平渐近线为 $y=-2$；

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{-2x^2+4x+4}{x^2}\right]=\infty$，所以铅垂渐近线为 $x=0$

10. 交换二次积分次序 $I=\int_{-1}^{1}dy\int_0^{1-y^2}f(x,y)dx=$_________



答案：$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}}f(x,y)dy$

解析：$\int_{-1}^{1}dy\int_0^{1-y^2}f(x,y)dx$ 中积分区域为 Y—型区域：

$\begin{cases}0\le y\le 1\\0\le x\le 1-y^2\end{cases}$，积分区域如右图所示.

交换积分次序，积分区域为 X—型区域：

$\begin{cases}0\le x\le 1\\-\sqrt{1-x}\le y\le\sqrt{1-x}\end{cases}$，所以 $\int_{-1}^{1}dy\int_0^{1-y^2}f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}}f(x,y)dy$.

三、计算题

11. 已知函数 $f(\mathrm{x})=\begin{cases}\frac{\sin 2(\mathrm{x}-1)}{x-1},x<1\\a,x=1\\x+b,x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，求常数 a 和 b 的值.

解析：本题主要考察连续的三个条件.

解：由于 f(x)在 x-1 处是连续的，故有

① $f(1)=a$

②$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+b)=1+b$

又$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在　　$\therefore \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$　　$\therefore 1+b=2$　　$\therefore b=1$

故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

③$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$　　$\therefore a=2$

在 x=0 处连续，所以 $f(x)$ 满足：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x^3}-1-x^3)'}{(x^6)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2e^{x^3}-3x^2}{6x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$

13. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^3=x+\arccos(xy)$ 确定，求 y'

解：由题意可知 $y^3-x-\arccos(xy)=0$，

令 $F(x,y)=y^3-x-\arccos(xy)$，则有

$$F_x(x,y)=\left[y^3-x-\arccos(xy)\right]_x'=-1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}\cdot y$$

$$F_y(x,y)=\left[y^3-x-\arccos(xy)\right]_y'=3y^2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}\cdot x$$

所以 $y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{-1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}\cdot y}{3y^2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}\cdot x}=\frac{\sqrt{1-x^2y^2}-y}{3y^2\sqrt{1-x^2y^2}+x}$

14. 求不定积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

解析：采用分部积分法，选取 $u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), v'=1$.

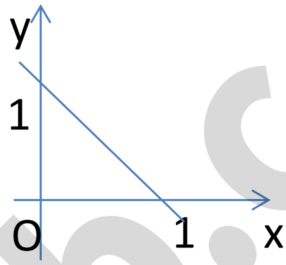
解：$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$$

15. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$，其中 D 是由直线 $x+y=1$ 和两个坐标轴所围成的闭区域.

解析：采用直角坐标法下计算二重积分，积分区域 D 如右图所示，

选择 X—型区域：$0\le y\le 1, 0\le y\le -x+1$.



解：$I=\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{-x+1}e^{x+y}dy=\int_0^1 e^x\cdot(e^y\big|_0^{-x+1})dx$

$$=\int_0^1(e-e^x)dx=(ex-e^x)\big|_0^1=1$$

16. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z=e^z$ 所确定的隐函数，求 dz.

解：原方程可化为 $x+y+z-e^z=0$，令 $F(x,y,z)=x+y+z-e^z$

$$\because F_x=\left[x+y+z-e^z\right]_x^{'}=1$$

$$F_y=\left[x+y+z-e^z\right]_y^{'}=1$$

$$F_z=\left[x+y+z-e^z\right]_z^{'}=1-e^z$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{1-e^z}=\frac{1}{e^z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1}{1-e^z}=\frac{1}{e^z-1}$$

$$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{e^z-1}dx+\frac{1}{e^z-1}dy$$

17. 已知 $y_1=e^x, y_2=e^{-x}$ 是 $y^{''}+py^{'}+qy=0$ (p,q 为常数)的解.

⑴求 p,q；　　⑵求满足条件 $y(0)=1, y^{'}(0)=2$ 的特解.

解：⑴由 $y_1=e^x, y_2=e^{-x}$ 是 $y^{''}+py^{'}+qy=0$ (p,q 为常数)的解可知，对应的特征方程的特征根为 $r_1=-1, r_2=1$，对应的特征方程为 $(r+1)(r-1)=0$，即 $r^2-1=0$，所以原微分方程为 $y^{''}-y=0$，故 $p=0, q=-1$.

⑵由题意可知原微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$，则 $y'=C_1e^x-C_2e^{-x}$.

将初始条件 $y(0)=1,y'(0)=2$ 代入，即 $\begin{cases}C_1+C_2=1\\C_1-C_2=2\end{cases}$，解得 $C_1=\frac{3}{2},C_2=-\frac{1}{2}$.

所以特解为 $y=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$.

18. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2}-\frac{4^n}{n!}\right)$ 的敛散性.

解：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2}-\frac{4^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$，

令 $v_n=\frac{4^n}{n!}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{v_n=\frac{4^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{4^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}4\cdot\frac{1}{n+1}=0<1$，则有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$ 收敛.

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ 是 $p>1$ 的 p-级数，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ 是收敛的.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2}-\frac{4^n}{n!}\right)$ 收敛.

四、综合题

19. 一条曲线通过 $(e^2,3)$，且在任一点处切线的斜率等于该点横坐标的倒数.

⑴求该曲线方程；

⑵求该曲线与 x 轴及 $x=e^2$ 所围图形绕 y 轴旋转一周形成旋转体的体积.

解：⑴由题意可知，$y'=\frac{1}{x}$，所以 $y=\ln x+C$.

由于曲线过点 $(e^2,3)$，即 $3=\ln e^2+C$，得到 C=1.

所以曲线方程为 $y=\ln x+1$

⑵ $V_y=\pi\int_0^3(e^2)^2dy-\pi\int_0^3(e^{y-1})^2dy=\pi(\frac{5}{2}e^4+\frac{1}{2e^2})$

20. 已知$x\to 0$时，$\sqrt{1+ax^2}-1$与$\sin^2 x$是等价无穷小.

⑴求常数 a 的值； ⑵判断$\sqrt{1+ax^2}-1$在定义域内的凹凸性.

解：⑴由题意可知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-1}{\sin^2 x}=1$，由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}ax^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}a=1$，所以$a=2$.

⑵由(1)可知，令$y=\sqrt{1+2x^2}-1(x\in R)$，则$y'=(\sqrt{1+2x^2}-1)'=\dfrac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}$，且

$$y''=\left(\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)'=\frac{2}{\left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

对于$x\in R$，$y''>0$，所以$\sqrt{1+2x^2}-1$在$(-\infty,+\infty)$上是凹的.

专插本《高等数学》重要知识回顾

第一章　函数、极限、连续

【考试要求】

(1)理解函数的概念，<u>**会求函数包括分段函数的定义域、表达式及函数值，并会作出简单函数的分段函数图像**</u>.

(2)<u>掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性的定义，会判断所给函数的相关性质</u>.

(3)理解函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像)，<u>**会求单调函数的反函数**</u>.

(4)掌握函数的四则运算与复合运算，熟练掌握复合函数的复合过程.

(5)掌握基本初等函数的简单性质及其图像.

(6)掌握初等函数的概念.

(7)了解极限的概念，<u>**掌握函数在一点处的左极限与右极限的概念，极限存在的充分必要条件**</u>.

(8)了解极限的有关性质，掌握极限的四则运算法则.

(9)<u>理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质，会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶、等价)</u>.

(10)<u>熟练掌握用两个重要极限求极限的方法</u>.

(11)<u>理解函数在一点连续与间断的概念，掌握判断函数(含分段函数)在一点处连续的方法</u>，理解函数在一点连续与极限存在之间的关系.

(12)<u>会求函数的间断点并确定其类型(第一类间断点、第二类间断点)</u>.

(13)理解在闭区间上连续函数的性质.

(14)理解初等函数在其定义区间上的连续性，并会利用函数连续性求极限.

【知识点一】常见函数的定义域的求解

◇定义域：使函数有意义的 x 的取值范围

1.多项式函数，类似于 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，定义域为 $\{x\mid x\in R\}$；

2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$，定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$；

3. $f(x)=\sqrt[2n]{x}$，定义域为 $\{x\mid x\geq 0\}$；

4. $f(x)=\log_a{}^x$，定义域为 $\{x\mid x>0\}$；

5. $f(x)=x^0$，定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$；

6. $f(x)=\sin x$ 或 $f(x)=\cos x$，定义域为 $\{x\mid x\in R\}$；

7. $f(x)=\tan x$，定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)\}$；

8. $f(x)=\cot x$，定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi(k\in Z)\}$；

9. $f(x)=arc\sin x$ 或 $f(x)=arc\cos x$，定义域为 $\{x\mid -1\leq x\leq 1\}$；

10. $f(x)=arc\tan x$ 或 $f(x)=arc\cot x$，定义域为 $\{x\mid x\in R\}$；

11. 若函数是由上述任意几个函数的加减乘除运算而得，该函数的定义域应为各个函数定义域的交集；
12. 分段函数的定义域为分段函数各分段区域内自变量取值范围的并集；
13. 若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f[g(x)]$ 的定义域.

具体做法：令 $a \le g(x) \le b$，所求 x 的取值范围即为复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域

14. 若已知 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f(x)$ 的定义域.

具体做法：令 $u = g(x)$，求 $u = g(x)$ 的值域即为函数 $f(x)$ 的定义域

【例】（2010 年）函数 $f(x) = 2\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ 的定义域__________

答案：$(0,+\infty)$

【知识点二】函数的奇偶性

◇判断函数奇偶性的前提条件：定义域关于原点对称（若定义域不关于原点对称该函数为非奇非偶）

1.判断方法：

①若 $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ 偶函数 $\Rightarrow$ 图像关于 y 轴对称 $\Rightarrow$ $f(-x) + f(x) = 2f(x)$

②若 $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ 奇函数 $\Rightarrow$ 图像关于原点对称 $\Rightarrow$ $f(-x) + f(x) = 0$

2. 幂函数 $f(x) = x^n \begin{cases} \text{偶函数，} & \text{n为偶数} \\ \text{奇函数，} & n\text{为奇数} \end{cases}$

3. 奇偶性的运算性质：（可由幂函数推导）简记：将奇函数看成负数，将偶函数看成正数

奇+奇=奇　　偶+偶=偶　　奇+偶=非奇非偶　　奇×奇=偶　　偶×偶=偶　　奇×偶=奇

4. 对于复合函数 $y = f[g(x)]$，分解为外部函数 $y = f(u)$、内部函数 $u = g(x)$，则

外部函数 $y = f(u)$	内部函数 $u = g(x)$	$\Rightarrow$	复合函数 $y = f[g(x)]$
奇/偶	偶	$\Rightarrow$	偶
奇	奇	$\Rightarrow$	奇
偶	奇	$\Rightarrow$	偶

5. 说明：

①判断奇偶性时必须先检验定义域是否关于原点对称

②若函数 $f(x)$ 为具体函数，可根据奇偶性的性质或定义判断；若函数 $f(x)$ 为抽象函数，首选定义判断。

【例】(2010 年)设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，则函数 $y = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ 在其定义域上是(　　)

A. 偶函数　　B.奇函数　　C. 周期函数　　C. 有界函数

答案：B

【知识点三】无穷小与无穷大

1.定义：

①若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小量.**

②若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=\infty$，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大量.**

2. 无穷小与无穷大的关系

在同一极限过程中，

①若函数 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

②若函数 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

3. 无穷小的性质

有界函数与无穷小之积仍为无穷小.(☆)

☆使用情况：一般在某个变化过程中出现 $\sin\infty$、$\cos\infty$、$\arctan\infty$ 等极限不存在的情况使用该性质.

4. 无穷小的比较

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \alpha(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \beta(x)=0$.

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高阶无穷小**，记为 $\alpha(x)=\mathrm{o}[\beta(x)]$；

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **低阶无穷小**；

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(\mathrm{C}\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小**；

(4)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**等价无穷小**，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

【例】（2015 年）若当 $x\to 0$ 时，$kx+2x^2+3x^3$ 与 x 是等价无穷小，则常数 $k=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

答案：B

5. 等价无穷小的替换（☆）

当 $x\to 0$ 时，

① $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+\mathrm{x})$；

② $1-\cos\sim\dfrac{1}{2}x^2$；　　③ $(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x\quad(\alpha>0)$.；

☆注意：等价无穷小的替换只能在乘除中，不能在加减中使用.

【知识点四】求极限

1. 函数极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的充分必要条：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\mathrm{A}$.

2. 求函数极限（☆）

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，

(1)若 $x_0 \in D$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

(2) 若 $x_0 \notin D$，

①有理化求极限，公式：$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$

【例】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\mathrm{x}(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{x}(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{1}{2}$.

②约分化简求极限（“$\dfrac{0}{0}$”型，也可以使用洛必达法则）

【例】$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{1}{x+3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

③先通分再约分化简求极限（“$\infty-\infty$”型可转化为⇒“$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，也可以使用洛必达法则）

【例】$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\mathrm{x}^2-\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-2)}{(x+1)(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1}=-1$

(3) 利用等价无穷小的性质

有界函数与无穷小之积仍为无穷小.(☆)

【例】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x=0$

(4) 利用等价无穷小的替换（☆)，当 $x\to 0$ 时，

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+\mathrm{x})$；$1-\cos\sim\dfrac{1}{2}x^2$；

$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x(\alpha>0)$.

【例】（2016 年）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}=$__________

答案：3

【例】（2017 年）当 $x\to 0$ 时，$f(\mathrm{x})\sim 2x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{f(x)}=$__________

答案：$\dfrac{3}{2}$

(5)第一个重要极限（了解）：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(6)第二个重要极限（☆)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ 或 } \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

特征：①适用幂指数函数 $f(\mathrm{x})^{g(\mathrm{x})}$；

②适用“1^∞”型或者能化为“1^∞”型的极限

③ $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=e$ 或 $\lim\limits_{\square\to 0}\left(1+\square\right)^{\frac{1}{\square}}=e$

【例】(2017 年）若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=4$，则常数 $a=$（　　）

A. $\ln 2$　　B. $2\ln 2$　　C. 1　　D. 4

答案：B

(7)利用对数恒等式求形如 $f(\mathrm{x})^{g(\mathrm{x})}$ 的极限

【例】$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\mathrm{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-\mathrm{x})}=1$

(8)洛必达法则求未定式极限（☆)

适用条件：必须是“$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限.

【例】(2015 年）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}$

答案：$-\dfrac{1}{3}$

【例】(2016 年）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x^3}\right)$

答案：$\dfrac{1}{6}$

【例】(2017 年）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}$。

答案：9

(9)利用分子分母同时除以最高次幂项的思想求$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限

说明：该类型题也可以使用洛必达法则求解，同时也适用数列极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0},m=n\\0,m<n\\\infty,m>n\end{cases}$$

【例】（2014 年）$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3n+1}}{n}$

答案：2

【例】（2017 年）下列极限等式不正确的是（　　）

A. $\lim_{n\to\infty}e^{-n}=0$　　B. $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$　　C. $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=0$　　D. $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

答案：C

【知识点五】连续性

1. 函数在某一点处的连续性（☆）

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处满足三个条件：

① $f(x_0)$ 存在；

② $\lim_{x\to x_0}f(\mathrm{x})$ 存在；

③ $\lim_{x\to x_0}f(\mathrm{x})=f(x_0)$.

则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

☆说明：检验是否连续，逐个检验上述三个条件.

【例】（2015 年）已知函数 $f(\mathrm{x})=\begin{cases}\frac{\sin 2(\mathrm{x}-1)}{x-1},x<1\\a,x=1\\x+b,x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，求常数 a 和 b 的值.

答案：a=2,b=1

【例】（2016 年）若函数 $f(\mathrm{x})=\begin{cases}3x+a,x\geq1\\x+1,x<1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，求常数 a=（　　）.

A. -1　　B. 0　　C . 1　　D. 2

答案：A

2. 间断点(不连续点)：

间断点分类

$$
\begin{cases}
\text{第一类间断点}\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(\mathrm{x})、\lim\limits_{x\to x_0^+} f(\mathrm{x})\text{均存在}\right)
\begin{cases}
\lim\limits_{x\to x_0^-} f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{x\to x_0} f(\mathrm{x}) \neq f(x_0) \Rightarrow \text{可去间断点} \\
\lim\limits_{x\to x_0^-} f(\mathrm{x}) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(\mathrm{x}) \Rightarrow \text{跳跃间断点}
\end{cases} \\
\text{第二类间断点}\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(\mathrm{x})、\lim\limits_{x\to x_0^+} f(\mathrm{x})\text{至少有一个存在}\right)
\begin{cases}
\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+)}} f(\mathrm{x}) = \infty \Rightarrow \text{无穷间断点} \\
\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+)}} f(\mathrm{x})\text{不存在} \Rightarrow \text{振荡间断点}
\end{cases}
\end{cases}
$$

第二章　一元函数微分学

【考试要求】

(1)理解导数的概念及几何意义，了解可导性与连续性的关系，会用定义求函数在一点处的导数.
(2)会求曲线上一点处的切线方程和法线方程.
(3)熟练掌握导数的基本公式、四则运算法则、反函数的求导法则以及复合函数的求导方法.
(4)掌握隐函数的求导法、对数求导法和由参数方程所确定的函数的求导方法.
(5)理解高阶导数的概念，会求函数的二、三阶导数.
(6)理解微分的概念，掌握微分法则，了解可微与可导的关系，会求函数的一阶微分.
(7)了解罗尔中值定理、拉格朗日中值定理及其应用，了解柯西中值定理(知道定理的条件及结论).
(8)熟练掌握应用洛必达法则"$\frac{0}{0}$"、"$\frac{\infty}{\infty}$"、"$0\cdot\infty$"、"$\infty-\infty$"、"1^{∞}"、"0^0"、"∞^0"求型未定式极限的方法.
(9)掌握利用导数判定函数的单调性及求函数的单调区间的方法，会利用函数的单调性证明简单的不等式.
(10)理解函数极值的概念，掌握求函数的极值、最大值和最小值的方法，并会应用极值方法解应用题.
(11)会判定曲线的凹凸性，会求曲线的拐点.
(12)会求曲线的水平渐近线.

【知识点一】导数的定义(☆)

1. 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

注意：利用分子自变量之差凑分母，分子分母符合定义形式就等于 $f'(x_0)$.

【例】(2015 年) 设函数 $f(\mathrm{x})=\log_2^{x}(\mathrm{x}>0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$______.

答案：$-\dfrac{1}{x\ln 2}$

【例】(2016 年) 已知函数 $f(\mathrm{x})$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=6$，则 $f'(x_0)=($　　$)$.

A. 1　　B. 2　　C . 3　　D. 6

答案：B

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左导数和右导数：

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

☆说明：一般当函数 $f(x)$ 很复杂时可以考虑使用定义求解导数.

【例】(2013 年) 函数 $f(\mathrm{x})=\begin{cases} x(1-\mathrm{x})^{\frac{1}{x}}, x<0 \\ 0, x\geq 0\end{cases}$ 在 x=0 处的左导数 $f'_-(0)=$______.

答案：e^{-1}

3. 定理：$f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0)=\mathrm{A}\Leftrightarrow f'(x_0)=\mathrm{A}$（即某点处的左右导数存在且相等，函数在该点处的导数存在且等于左右导数）.

4. 可导与连续之间的关系

可导一定连续，连续不一定可导

☆注意：记住反例 $f(\mathrm{x})=|x|$ 在 x=0 处是连续的但是不可导

【知识点二】导数的几何意义

◇导数的几何意义：函数 $f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的导数即为该点处切线的斜率，即：$k_{切线}=f'(x_0)$

☆切线方程和法线方程的求解步骤

①找切点 $M(x_0,y_0)$，**（若没有指出切点，先设出来）**

②求出 $f'(x)$，并求 $k_{切线}=f'(x_0)$ 或 $k_{法线}=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$

③代入方程，切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(\mathrm{x}-x_0)$

法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(\mathrm{x}-x_0)$

说明：⑴若在点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率不存在，则切线方程为 $x=x_0$；法线方程为 $y=y_0$.

⑵若在点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率 $f'(x_0)=0$，则切线方程为 $y=y_0$；法线方程为 $x=x_0$.

【例】（2014 年）已知函数 $f(\mathrm{x})=\begin{cases}(1+3\mathrm{x}^2)^{\frac{1}{x^2}}\sin 3\mathrm{x}+1, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 在 x=0 处连续.

⑴求常数 a 的值. ⑵求曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 在点 $(0,a)$ 处的切线方程.

答案：(1) a=1； (2) $y=3e^3x+1$

【例】（2016 年）求曲线 $3x^2+y+e^{xy}=2$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

答案：$x+y=1$

【知识点三】微分与二阶导数

1. 微分（☆）

方法：先求导数 y'，再代入公式 $dy=y'dx$ 或者 $dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)dx$ 即求得微分

2. 二阶导数（☆）

方法：先求一阶导数 y'，再求二阶导数 $y''=\left(y'\right)'$

【例】（2015 年）设 $y=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$，求 $y''\big|_{x=0}$.

答案：$-\dfrac{1}{4}$

【例】（2016 年）设 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $dy\big|_{x=0}=$______

答案：dx

【知识点四】求函数的导数

1. 初等函数的求导

①基本初等函数求导公式.

②导数的四则运算.

$[\mathrm{u(x)}\cdot\mathrm{v(x)}]'=\mathrm{u}'(\mathrm{x})\cdot\mathrm{v(x)}+\mathrm{u(x)}\cdot\mathrm{v}'(\mathrm{x})$　　特别地，$[\mathrm{C}\cdot\mathrm{u(x)}]'=\mathrm{C}\cdot\mathrm{u}'(\mathrm{x})$

$$\left[\frac{\mathrm{u(x)}}{\mathrm{v(x)}}\right]'=\frac{\mathrm{u}'(\mathrm{x})\cdot\mathrm{v(x)}-\mathrm{u(x)}\cdot\mathrm{v}'(\mathrm{x})}{[\mathrm{v(x)}]^2}$$

③复合函数的导数——链式法则

若 $u=g(\mathrm{x}),y=f(\mathrm{u})\Rightarrow y=f[\mathrm{g(x)}]$，且 $u_x'=g'(\mathrm{x}),y_u'=f'(\mathrm{u})$，则 $y'=y_u'\cdot u_x'$

2. 隐函数的求导（☆）

①方法一：利用一阶微分形式的不变性

方程两边同时微分，得含有 dx、dy 的一个方程，从中求出微商 $\dfrac{dy}{dx}$ 即为所求

②方法二：利用复合函数求导法则

第一步：方程两边同时对 x 求导，遇到 y 的表达式，把 y 看作 x 的函数，先对 y 求导，再乘以 y 对 x 的导数 y'，得一个含有 x、y、y' 的方程；

第二步：求解上述方程，得导数 y'.

③公式法（首选）

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(\mathrm{x,y})}{F_y(\mathrm{x,y})}$$

3. 参数函数确定的函数求导（☆）

对于参数函数 $\begin{cases}x=\varphi(\mathrm{t})\\ y=\psi(\mathrm{t})\end{cases}$

①一阶导数：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\psi^{'}(\mathrm{t})}{\varphi^{'}(\mathrm{t})}$

②二阶导数：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}/\dfrac{dx}{dt}$

4. 对数求导法（☆）

◇适用于幂指函数 $f(\mathrm{x})^{g(\mathrm{x})}$ 和多因子乘积(或商)函数的求导

◇方法：通过两边同时取自然对数，转化为隐函数进行求导.

【例】（2015 年）设函数 $y=f(\mathrm{x})$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\tan t\\ y=t^3+2t\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=$________.

答案：2

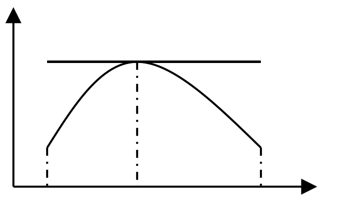
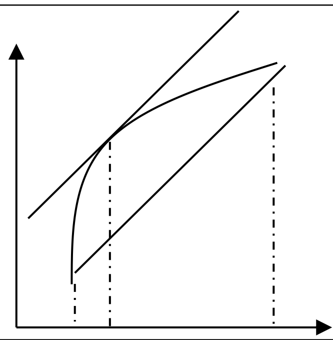
【例】（2017 年）设 $y=x^{x^2}(\mathrm{x}>0)$，则 $y^{'}$。

答案：$y^{'}=(2x\ln x+x)x^{x^2}=(2\ln x+)x^{x^2+1}$

【例】（2017 年）已知函数参数方程为 $x=t-\arctan t, y=\ln(1+\mathrm{t}^2)$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=2}=$________.

答案：1

【知识点五】中值定理（☆）

定理	条件	结论	图像
罗尔中值定理	1.f(x)在区间[a,b]连续 2.f(x)在区间(a,b)可导 3.f(a)=f(b)	至少存在一点 $c\in(a,b)$， 使得 $f^{'}(c)=0$	
拉格朗日中值定理	1.f(x)在区间[a,b]连续 2.f(x)在区间(a,b)可导	至少存在一点 $c\in(a,b)$， 使得 $f^{'}(c)=\dfrac{f(\mathrm{b})-f(\mathrm{a})}{b-a}$	

【例】（2015 年）若函数 $f(\mathrm{x})=\sqrt{1-x^2}+kx$ 在区间 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，则常数 k=（ ）.

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

答案：C

【例】（2017 年）设 $f(\mathrm{x})$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=\mathrm{f(b)}$，则曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 在 (a,b)

内平行于 x 轴的切线有（　　）条.

A. 仅有一条　　B. 至少一条　　C. 有两条　　D. 不存在

答案：B

【知识点六】函数单调性判定及求单调区间

◇定理：设函数 $f(\mathrm{x})$ 在 (a,b) 内可导，则有

①若在 (a,b) 内 $f'(\mathrm{x})>0$，则函数 $f(\mathrm{x})$ 在 (a,b) 内单调增加.

②若在 (a,b) 内 $f'(\mathrm{x})<0$，则函数 $f(\mathrm{x})$ 在 (a,b) 内单调减少.

◇讨论函数单调性的一般步骤：

①确定函数 $f(\mathrm{x})$ 的定义域；

②求出 $f'(\mathrm{x})=0$ 的点和 $f'(\mathrm{x})$ 不存在的点，并以这些点为分界点将定义域划分为若干个子区间；

③分别讨论 $f'(\mathrm{x})$ 在各个区间内的符号，确定函数的单调性.

说明：可以在第三步列表判断(若 x_1 是驻点，x_2 是不可导点)

X	$(-\infty,\mathrm{x}_1)$	x_1	$(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$	x_2	$(\mathrm{x}_2,+\infty)$
$f'(\mathrm{x})$	+	0	—	——	—
$f(\mathrm{x})$	↗		↘		↘

【知识点七】求函数的极值及最值

1. 极值（☆）

⑴若 $f'(\mathrm{x}_0)=0$，则称 x_0 为函数 $f(\mathrm{x})$ 的**驻点**.

⑵（极值的第一判定定理）

设函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在点 x_0 处连续，且在点 x_0 的某一去心邻域内可导，若在该邻域内

①当 $\mathrm{x}<\mathrm{x}_0$ 时，$f'(\mathrm{x})>0$；当 $\mathrm{x}>\mathrm{x}_0$ 时，$f'(\mathrm{x})<0$，则 $f(\mathrm{x}_0)$ 为 $f(\mathrm{x})$ 的极大值；

②当 $\mathrm{x}<\mathrm{x}_0$ 时，$f'(\mathrm{x})<0$；当 $\mathrm{x}>\mathrm{x}_0$ 时，$f'(\mathrm{x})>0$，则 $f(\mathrm{x}_0)$ 为 $f(\mathrm{x})$ 的极小值；

③若在点 x_0 的两侧 $f'(\mathrm{x})$ 不变号，则 $f(\mathrm{x}_0)$ 不是 $f(\mathrm{x})$ 的极值.

简记：左边递增右边递减→极大值；左边递减右边递增→极小值；左右两边单调性不变→不是极值

⑵（极值的第二判定定理）

设函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在点 x_0 的某个邻域内一阶可导，在 $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$ 处二阶可导，且 $f'(\mathrm{x}_0)=0, f''(\mathrm{x}_0)\neq 0$.

①若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值；

②若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

◇说明：若满足 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$ 条件，可首选极值的第二判定定理判断

⑶讨论函数极值的一般步骤：

①确定函数 $f(x)$ 的定义域；

②求出 $f'(x)=0$ 的点和 $f'(x)$ 不存在的点，并以这些点为分界点将定义域划分为若干个子区间；

③分别讨论 $f'(x)$ 在各个区间内的符号，确定函数在各区间的单调性.

④根据极值的第一判定定理确定极大值和极小值

◇说明：可以在第三、四步列表判断(若 x_1、x_2 是驻点，x_3 是不可导点)

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	(x_2,x_3)	x_3	$(x_3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+	不可导点	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗	不是极值	↗

【例】（2014 年）求函数 $f(x)=\log_4^{(4^x+1)}-\frac{1}{2}x-\log_4{}^2$ 的单调区间和极值.

答案：单调递减区间 $(-\infty,0)$；单调递增区间 $(0,+\infty)$；极小值为 $f(0)=0$

【例】（2015 年）已知函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=1$，则下列结论正确的是（　　）

A. x_0 为 $f(x)$ 的极小值点　　　　B. x_0 为 $f(x)$ 的极大值点

C. x_0 不是 $f(x)$ 的极小值点　　　　D. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

答案：A

【例】（2016 年）已知定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的非负可导函数 $f(x)$ 满足 $f^2(x)=\int_0^x \frac{1+f^2(t)}{1+t^2}dt\,(x\geq 0)$.

⑴判断函数 $f(x)$ 是否存在极值，并说明理由；　　　　⑵求 $f(x)$.

答案：(1)存在；　(2) $y=\sqrt{e^{\arctan x}-1}$

2. 最值

◇求函数 $y=f(x)$ 在闭区间[a, b]上最值的一般步骤：

①求出函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在 (a,b) 内 $f^{'}(\mathrm{x})=0$ 的点和 $f^{'}(\mathrm{x})$ 不存在的点；

②求出①中所有点的函数值及 $f(a),\mathrm{f(b)}$；

③比较这些数值的大小，最大的数值即为最大值；最小的数值即为最小值.

【知识点七】曲线的凹凸性及拐点（☆）

1. 凹凸性的判定定理（☆）

设函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在 (a,b) 内存在二阶导数.

①若在 (a,b) 内 $f^{''}(\mathrm{x})>0$，则曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 在 (a,b) 上是凹的；

②若在 (a,b) 内 $f^{''}(\mathrm{x})<0$，则曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 在 (a,b) 上是凸的；

2. 拐点：连续曲线凹与凸的分界点.

◇说明：①在拐点 (x_0,y_0) 左右两侧 $f^{''}(\mathrm{x})$ 的符号必须异号.（即在 $x=\mathrm{x}_0$ 的左右两侧 $f^{''}(\mathrm{x})$ 同号，则 (x_0,y_0) 不是拐点）.

②若 (x_0,y_0) 是曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 的拐点且在 $x=\mathrm{x}_0$ 处二阶导数存在，则有 $\begin{cases} y_0=f(\mathrm{x}_0) \\ f^{''}(\mathrm{x}_0)=0 \end{cases}$.

③若 x_0 是函数 $y=f(\mathrm{x})$ 的极值点且在 $x=\mathrm{x}_0$ 处一阶导数存在，则有 $\begin{cases} y_0=f(\mathrm{x}_0) \\ f^{'}(\mathrm{x}_0)=0 \end{cases}$.

3. 讨论函数凹凸性和拐点的一般步骤：

①确定函数 $f(\mathrm{x})$ 的定义域；

②求出 $f^{''}(\mathrm{x})=0$ 的点和 $f^{''}(\mathrm{x})$ 不存在的点，并以这些点为分界点将定义域划分为若干个子区间；

③分别讨论 $f^{''}(\mathrm{x})$ 在各个区间内的符号，确定函数在各区间的凹凸性.

④根据凹凸性判定定理确定拐点.

◇说明：可以在第三、四步列表判断(若 x_1、x_2 是二阶导数等于 0 的点，x_3 是二阶不可导点)

x	$(-\infty,\mathrm{x}_1)$	x_1	$(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$	x_2	$(\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$	x_3	$(\mathrm{x}_3,+\infty)$
$f^{''}(\mathrm{x})$	+	0	—	0	+	不可导点	+
$f(\mathrm{x})$	凹	拐点	凸	拐点	凹	不是拐点	凹

即：凹区间为 $(-\infty,\mathrm{x}_1)$，$(\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$，$(\mathrm{x}_3,+\infty)$；凸区间为 $(\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$；拐点为 $(\mathrm{x}_1,f(\mathrm{x}_1))$，$(\mathrm{x}_2,f(\mathrm{x}_2))$

【例】（2016 年）若点(1,2)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则常数 a 与 b 的值应分别为（　　）

A. -1 和 3　　B. 3 和 -1　　C. -2 和 6　　D. 6 和 -2

答案：A

【例】（2017 年）已知 $f(\mathrm{x})=\int_1^x\sqrt{(t-1)^2+1}dt$，求 $f(\mathrm{x})$ 的凹凸区间和拐点.

答案：凸区间 $(-\infty,1)$；凹区间 $(1,+\infty)$；拐点 $(1,0)$

【知识点八】曲线的渐近线（☆）

1. **水平渐近线（☆）**

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(\mathrm{x})=b$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(\mathrm{x})=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(\mathrm{x})=b$），则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 的**水平渐近线**.

2. **铅垂渐近线**

若点 x_0 是曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\mathrm{x})=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(\mathrm{x})=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(\mathrm{x})=\infty$），则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 的**铅垂渐近线**.

【例】（2015 年）曲线 $y=\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x$ 的水平渐近线 $y=$______

答案：e^{-5}

第三章　一元函数积分学

【考试要求】

(1)理解原函数与不定积分的概念及其关系，掌握不定积分的性质.
(2)熟练掌握不定积分的基本公式.
(3)熟练掌握不定积分第一换元法，掌握第二换元法(仅限三角代换与简单的根式代换).
(4)熟练掌握不定积分分部积分法.
(5)掌握简单有理函数的不定积分.
(6)理解定积分的概念与几何意义，了解函数连续是可积的充分条件.
(7)掌握定积分的基本性质.
(8)理解变上限的定积分是连续的被积函数的一个原函数，掌握对变上限定积分求导数的方法.
(9)掌握牛顿-莱布尼茨公式.
(10)掌握定积分的换元法与分部积分法.
(11)了解无穷区间广义积分的概念，并会进行计算.
(12)掌握直角坐标下用定积分计算平面图形的面积以及平面图形绕坐标轴旋转所生成的旋转体体积的方法.
(13)了解直角坐标下计算平面曲线弧长(含参数方程)的方法.

【知识点一】不定积分的定义(☆)

1. 原函数

设函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的已知函数，如果存在可导函数 F(x)，使得 $F^{'}(x)=f(x)$ (或 $dF(x)=f(x)dx$)，$x\in I$.则称函数 F(x)为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

注意：解题时一定要分清谁是 F(x)，谁是 $f(x)$，再根据 $F^{'}(x)=f(x)$ 求解.

2. 不定积分(☆)

函数 $f(x)$ 的原函数的全体，称为 $f(x)$ 的不定积分.即：$\int f(x)dx=F(x)+C$

3. 不定积分的性质(☆)

① $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

② $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

③ $\left[\int f(x)dx\right]^{'}=f(x)$；　　$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$

④ $\int f^{'}(x)dx=f(x)+C$；　　$\int df(x)=f(x)+C$

☆说明：性质③和④要熟记.

【例】(2017 年) 设 F(x)是可导函数 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意实数，则下列等式不正确的是（ ）

A. $\int f^{'}(x)dx=f(x)+C$　　B. $\left[\int f(x)dx\right]^{'}=f(x)$

C. $\int f(x)dx=F(x)+C$　　D. $\int F(x)dx=f(x)+C$

答案：D

【知识点二】不定积分的计算（☆）

1. 直接积分法求积分

①化为或套用基本积分公式；

②乘积展开

③根式化为指数

2. 第一换元积分法——凑微分（☆）

①首先将 $\int g(x)dx$ 拆成 $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx$；

②再将 $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx$ 凑微分为 $\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$；

③作变换换元，令 $u=\varphi(x)$ 代入，有 $\int f(u)du=F(u)+C$；

④变量还原，将 $u=\varphi(x)$ 回代，得到 $F[\varphi(x)]+C$.

【例】（2015 年）设 F(x)是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意实数，则 $\int f(2x)dx=$（　　）.

A. $F(x)+C$　　B. $F(2x)+C$　　C. $\frac{1}{2}F(2x)+C$　　D. $2F(2x)+C$

答案：C

【例】（2016 年）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上可导，C 为任意实数，则 $\int \sin x\cdot f'(\cos x)dx=$（　　）.

A. $\cos xf(\cos x)+C$　　B. $-\cos xf(\cos x)+C$　　C. $f(\cos x)+C$　　D. $-f(\cos x)+C$

答案：D

【例】（2016 年）求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

答案：$-\arcsin(1-2x)+C$

3. 第二换元积分法（☆）

①首先作变换 $x=\psi(t)$ 代入换元，得 $\int f(x)dx=\int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)dt$；

②再计算不定积分，得 $\int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)dt=F(t)+C$；

③变量还原，将 $t=\psi^{-1}(x)$ 回代，得到 $F[t]+C=F[\psi^{-1}(x)]+C$.

④常见的变量替换：

被积分函数类型	变量替换
含 $\sqrt[n]{ax+b}$	令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$（☆）

含 $\sqrt[n_1]{x},\sqrt[n_2]{x}$	令 $t=\sqrt[n]{x}$，其中 n 为 n_1 和 n_2 的最小公倍数（☆）
含 $\sqrt{a^2-x^2}$	令 $x=a\sin t$（☆）
含 $\sqrt{x^2+a^2}$	令 $x=a\tan t$
含 $\sqrt{x^2-a^2}$	令 $x=a\sec t$

【例】（2015 年）计算不定积分 $\int\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx$.

答案：$2(\sqrt{x+2}-\arctan\sqrt{x+2})+C$

【例】（2017 年）已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续，且 $\int_0^2 xf(x)dx=4$，则 $\int_0^4 f(\sqrt{x})dx=$（　　）.

A.　2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

答案：D

4. 分部积分法（☆）

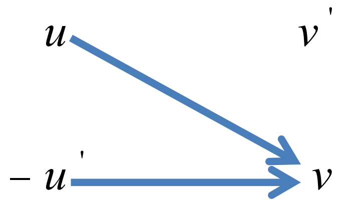
①分部积分法公式：$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ 或 $\int udv=uv-\int vdu$；

②u,v' 的选择顺序：反三角函数、对数、幂函数、三角函数、指数(即“反对幂三指”)

原则：函数靠左边选择为 u，靠右边选择为 v'

③示意图记忆：

$$\int uv'dx$$
$$=uv-\int u'vdx$$



<u>说明：分部积分法一般适用于被积函数为两类不同函数的乘积</u>

【例】（2017 年）求不定积分 $\int x\cos(x+2)dx$.

答案：$x\sin(x+2)+\cos(x+2)+C$

5. 简单有理函数的不定积分（☆）

⑴有理函数：两个多项式之商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 所表示的函数.

◇说明：若被积函数有理函数中 P(x)的最高次数大于或等于 Q(x)的最高次数，在积分之前先将有理函数化

简为 P(x)的最高次数小于 Q(x)的最高次数（即真分式）.

⑵对于真分式化为以下四种最简分式进行积分：

① $\dfrac{A}{x-a}$

② $\dfrac{A}{(x-a)^n}$，其中 $n>1$，且 n 为整数

③ $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$，其中 $p^2-4q<0$

④ $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$，其中 $p^2-4q<0$，$n>1$，且 n 为整数

【例】计算不定积分 $\int\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx$

解：$\int\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx=\int\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}dx=\int\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}\right]dx=\dfrac{1}{2}(\int\dfrac{1}{x-3}dx-\int\dfrac{1}{x-1})dx$

$=\dfrac{1}{2}(\ln|x-3|-\ln|x-1|)+C=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|x-3|}{|x-1|}+C=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|+C$

【知识点三】定积分的性质(☆)

性质 1： ① $\int_a^a f(x)dx=0$； ② $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ $(a\neq b)$

性质 2： 在区间[a,b]上，

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$； ② $\int_a^b 1dx=b-a$

③ $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

性质 3：(可加性) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

性质 4： 在区间[a,b]上，（★一般在证明中使用）

① $f(x)\geq 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geq 0$；

② $f(x)\leq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

性质 5：(估值定理)设 M 和 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上的最大值和最小值，则

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

性质 6：(积分中值定理)如果函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上连续，则在区间[a,b]上至少存在一个点 ξ，使得下式成

立：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a \le \xi \le b)$

性质 7：设函数 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的连续函数 $(a>0)$，则

①当函数 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0;$

②当函数 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$

◇说明：性质 7 使用时注意积分区间的对称性.

【知识点四】定积分的计算(☆)

1. 变上限的定积分（☆）

①变上限的定积分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数，即有：$\left[\int_a^x f(t)dt\right]' = f(x)$

②对于一般的变上限积分的求导公式：$\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right]' = f\left[\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)$

③对于一般的变限积分的求导公式：$\left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(t)dt\right]' = f\left[\varphi_1(x)\right]\cdot\varphi_1'(x) - f\left[\varphi_2(x)\right]\cdot\varphi_2'(x)$

◇说明：做题时遇到变限积分一般就是对变限积分求导

2. 牛顿—莱布尼茨公式（☆）——微分基本公式

若函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上的一个原函数，则：

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

3. 定积分的换元积分法（☆）

设函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

① $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$；

② $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$)上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi \subset [a,b]$，

则有：$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt$

◇说明：不定积分换元后需要回代；而定积分换元后积分上下限也随之改变，求出结果不需要回代.

4. 定积分的分部积分法（☆）

$$\int_a^b u\cdot v'dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b u'\cdot vdx$$

【例】（2016 年）计算定积分 $\int_0^1 x\cdot 2^x dx$.

答案：$\dfrac{2\ln 2-1}{(\ln 2)^2}$

【例】（2017 年）已知 $\int_1^2 xf(x)dx=4$，则 $\int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx=$________.

答案：8

【知识点五】无穷区间上的广义积分(☆)

①无穷区间上的广义积分的计算与定积分的计算方法相似，均可利用牛顿—莱布尼茨公式. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则：

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)=F(+\infty)-F(a)$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(b)-F(-\infty)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(+\infty)-F(-\infty)$$

② $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, p>1\Rightarrow \text{收敛}\\ +\infty, p\le 1\Rightarrow \text{发散}\end{cases}$ **（☆一定记住该结果）**

【例】（2015 年）广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^6}dx=$______.

答案：$\dfrac{1}{5}$

【例】（2017 年）若常数 $p>1$，则广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx=$______.

答案：$\dfrac{1}{p-1}$

【知识点六】定积分的应用(☆)

◇定积分应用的原则：

①尽量画出所求图形的草图，根据图形特点选择合适的坐标和积分变量；

②求出相关曲线的交点，并确定积分区间(一般地，如果选择的积分变量 x，就对 x 轴作垂线确定积分上下限；如果选择的积分变量 y，就对 y 轴作垂线确定积分上下限)

1. 平面图形的面积(☆)

⑴计算步骤：

①画出平面图形的草图；

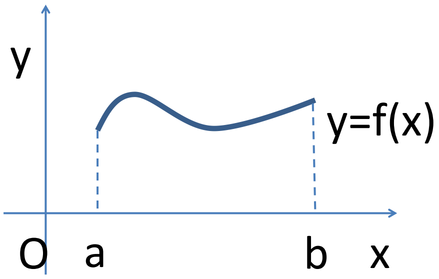
②选择积分变量，确定积分区间(一般地，如果选择的积分变量 x，就对 x 轴作垂线确定积分上下限；如

果选择的积分变量 y，就对 y 轴作垂线确定积分上下限）；

③把平面图形的面积表达为定积分，计算定积分即得到平面图形面积.

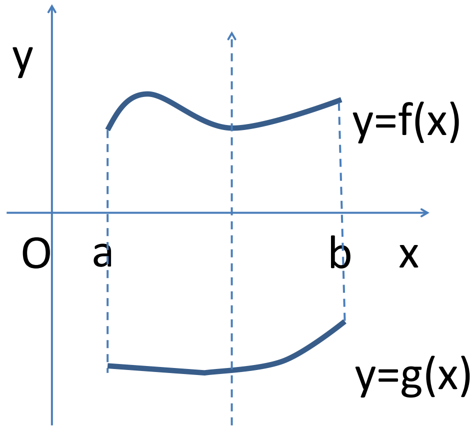
⑵分类求平面图形的面积 A：

①积分变量为 x



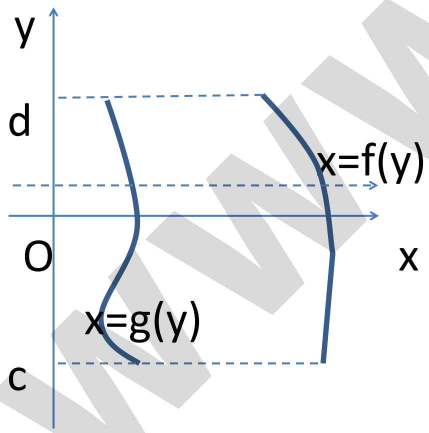
$$\Rightarrow A=\int_a^b f(x)dx$$

②积分变量为 x



$$\Rightarrow A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

③积分变量为 y



$$\Rightarrow A=\int_c^d [f(y)-g(y)]dy$$

【例】（2015 年）求由曲线 $y=x\cos 2x$ 和直线 $y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$ 围成的平面图形的面积.

答案：$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

2. 旋转体的体积（☆）

⑴计算步骤：

①画出平面图形的草图；

②选择积分变量，确定积分区间(一般地，如果关于 x 轴旋转就选择的积分变量为 x；如果关于 y 轴旋转就选择的积分变量为 y)；

③把旋转体的体积表达为定积分，计算定积分即得到旋转体的体积.

⑵分类求旋转体的体积 V：

①绕 x 轴旋转：

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

②绕 y 轴旋转：

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \left[f^{-1}(x)\right]^2 dy$$

【例】（2016 年）椭圆曲线 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V=________.

答案：$\frac{8}{3}\pi$

【例】（2017 年）已知函数 $f(\mathrm{x})=\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$.

⑴求曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 的水平渐近线方程.

⑵求由曲线 $y=f(\mathrm{x}), x=0, x=1, y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积.

答案：(1) $y=1$; (2) $\pi\ln 2$

3. 平面曲线的弧长（☆)

◇计算平面曲线弧长 l 的公式：

①一般曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 的弧长公式： $l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

②参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 表示的曲线的弧长公式： $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$

【例】（2014 年）设函数 $f(\mathrm{x})=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

⑴求曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 上相应于 $0\le x\le 1$ 的弧段长度 s;

⑵求由曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 和直线 $x=0, x=1, y=0$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

答案：(1) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$； （2） $\frac{\pi}{9}$

第四章　多元函数微积分学初步

【考试要求】

(1)理解多元函数的概念，会求二元函数的定义域，了解二元函数的几何意义.

(2)理解二元函数的一阶偏导数和全微分的概念，**掌握二元函数的一阶偏导数及二阶偏导数的求法，掌握二元函数全微分的求法**.

(3)**掌握复合函数与隐函数的偏导数的求法**.

(4)理解二重积分的概念，**掌握二重积分的性质，掌握直角坐标及极坐标下二重积分的计算方法**.

【知识点一】二元函数的偏导数与全微分的概念(☆)

1. 一阶偏导数的概念(☆)

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义

①关于 x 在 x_0 处的一阶偏导数（将 y 固定在 y_0）.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

②关于 y 在 y_0 处的一阶偏导数（将 x 固定在 x_0）.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

注意：求二元函数的一阶偏导数具体方法：

(1)对谁求偏导，即谁在变（只有一个变量在变）；

(2)其余变量均视作常数.

2. 二阶偏导数的概念(☆)

按对变量求导次序的不同，二元函数 $z=f(x,y)$ 有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xx}(x,y)=f_{xx}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xy}(x,y)=f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yx}(x,y)=f_{yx}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yy}(x,y)=f_{yy}$$

注意：求二阶偏导数时哪个变量在前就先对谁求导（如：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，z 先关于 x 求导得到 $\frac{\partial z}{\partial x}$，再对 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 关于 y 求导得到 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$）.

3. 全微分公式(☆)

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处的全微分为：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

【例】（2015 年）设二元函数 $z=f(x,y)=x^y\ln x(x>0,x\neq 1)$，平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,2\le x\le e,-1\le y\le 1\}$.

⑴求全微分 dz .

答案：$dz=x^{y-1}(1+y\ln x)dx+x^y\ln^2 xdy$

【例】（2016 年）设二元函数 $z=x\ln y$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$________.

答案：$\frac{1}{y}$

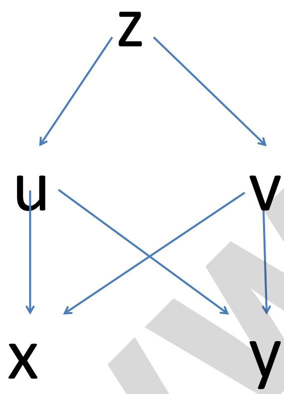
【例】（2017 年）已知函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导，且 $dz=\frac{-y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy$ 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

答案：$-\frac{1}{x^2}$

【知识点二】二元函数的偏导数的计算(☆)

1.复合函数的偏导数(☆)——链式法则(☆)

设函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点(x,y)处有连续偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点(x,y)处关于 x 和 y 的偏导数分别为：



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

【例】（2016 年）设 $z=u^v$，而 $u=2x+y,v=x$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

答案：$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=2+2\ln 2,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=1$

2.隐函数的偏导数(☆)

设方程 $F(x,y,z)=0$，求隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

注意：在求 $F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z)$ 时：

⑴对谁求偏导，即谁在变（只有一个变量在变）；
⑵其余变量均视作常数.

【例】（2017 年）设 $(x-y)^3-z+\tan z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

答案：0

【知识点三】二重积分（☆）

1. 二重积分的性质

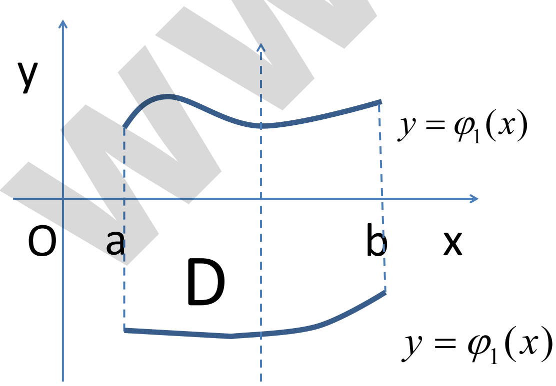
①（保号性）若 $f(x,y)\le g(x,y),(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$；

②若 $m\le f(x,y)\le M$，则 $m\cdot S_D\le\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le M\cdot S_D$（研究积分值大小的范围）；

③面积公式 $\iint\limits_D d\sigma=S_D$（求积分值或求参数值）.

2. 交换二次积分次序（☆）

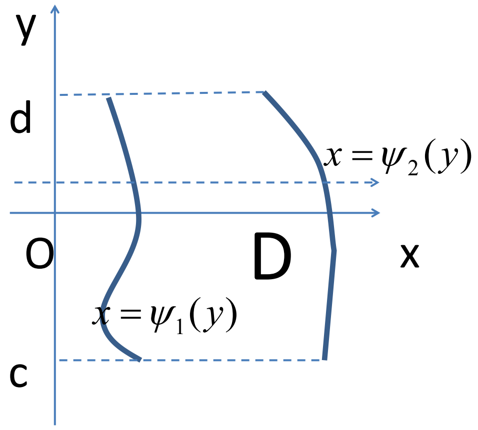
⑴二次积分交换积积分次序的步骤：
①由二次积分的上、下限写出积分区域所满足的不等式组；
②根据不等式组画出积分区域的草图；
③把积分区域用于第一步中类型不同的另一种不等式组表出；
④给出新的二次积分的上下限，并写出交换了积分次序的二次积分.
⑵两类不同的积分区域：
①X—型区域特点：穿过积分区域且垂直 x 轴的直线与区域的边界的交点不多于两个.



X—型区域一般先对 y 积分，后对 x 积分，且 x 的取值是常数范围，例如：

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$$

②Y—型区域特点：穿过积分区域且垂直 y 轴的直线与区域的边界的交点不多于两个.



Y—型区域一般先对 x 积分，后对 y 积分，且 y 的取值是常数范围，例如：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

【例】（2014 年）交换二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy=$____________.

答案：$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

3. 直角坐标系下计算二重积分(☆)（几乎年年都考）

◇基本步骤：

①根据积分区域画出草图；

②判断积分区域是 X—型区域还是 Y—型区域；

③用不等式组表示积分区域；

④计算二次积分值.

【例】（2015 年）设二元函数 $z=f(x,y)=x^y\ln x(x>0,x\neq 1)$，平面区域 $D=\{(x,y)|2\le x\le e,-1\le y\le 1\}$.

⑵求 $\iint_D f(x,y)d\sigma$.

答案：$\frac{1}{2}e^2+\ln 2-3$

【例】（2016 年）设平面区域 D 由曲线 $xy=1$ 和直线 $y=x$ 及 $x=2$ 围成，计算二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$.

答案：$\frac{4}{3}$

【例】（2017 年）求二重积分 $\iint_D e^{x^3}d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的有界闭区域.

答案：$\frac{1}{3}(e-1)$

4. 极坐标下计算二重积分(☆)

◇说明：

①根据积分区域画出草图；

②根据草图找到极角 θ 和极径 $r(r>0)$ 取值范围；

③将直角坐标形式转化为极坐标形式，转化公式为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\cdot d\theta；$$

④求二重积分方法的选择(☆)：

对于一般的积分区域可采用直角坐标计算二重积分；

对于被积函数为 $f(x^2+y^2), f(\frac{x}{y})$ 或者积分区域 D 为圆形域、扇形域圆环域时利用极坐标计算二重积分.

【例】(2015 年) 将二次积分 $I = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$ 化为极坐标形式的二重积分，并计算 I 的值.

答案： $I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 e^{r^2} r dr = \frac{\pi}{2}(e-1)$

【例】(2016 年) 设平面区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$，则 $\iint_D (x^2+y^2)d\sigma =$ ________.

答案： $\frac{\pi}{2}$

【例】(2017 年) 将二次积分 $I = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)dy$ 化为极坐标形式的二次积分，则 $I =$

A. $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 rf(r^2)dr$ B. $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2)dr$ C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rf(r^2)dr$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2)dr$

答案：A

第五章　常微分方程初步

【考试要求】

(1)了解微分方程的阶、解、<u>通解</u>、<u>特解及初值条件</u>等基本概念.

(2)<u>**会求可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程的通解及特解**</u>.

(3)<u>**会求二阶常系数线性齐次微分方程的通解及特解**</u>.

【知识点一】可分离变量的微分方程的求解(☆)

◇形如 $y^{'}=f(x)g(y)$ 的微分方程，计算方法：

$$y^{'}=f(x)g(y)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\Rightarrow\frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx\Rightarrow\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$$

【例】（2015 年）微分方程 $y^{'}-xy=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解为 $y=$______.

答案： $e^{\frac{1}{2}x^2}$

注意：先求通解（含有常数 C），再将初始条件代入通解求得 C.

2. 一阶线性微分方程的求解(☆)——公式法

◇先将微分方程化为标准形式，形如 $y^{'}+P(x)y=Q(x)$ 的微分方程，计算方法：

①先计算不定积分 $\int P(x)dx$，找 P(x)的一个原函数；

②直接带入公式： $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

【例】（2017 年）若曲线经过点 $(0,1)$，且该曲线上任意一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2y+e^x$，求这条曲线的方程.

答案： $y=-e^x+2e^{2x}$

3. 二阶常系数齐次线性微分方程的求解(☆)　（几乎年年都考）

◇先将微分方程化为标准形式，形如 $y^{''}+py^{'}+qy=0$ 的微分方程，计算方法：

①写出微分方程所对应的特征方程 $r^2+pr+q=0$；

②计算特征方程的判别式 $\Delta=p^2-4q$，根据判别式具体判断：

判别式取值	特征方程的两个根	方程 $y^{''}+py^{'}+qy=0$ 的通解
$\Delta=p^2-4q>0$	**两个不相等的实根** $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

$\Delta = p^2 - 4q = 0$	**两个相等的实根** $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$
$\Delta = p^2 - 4q < 0$	**一对共轭复根** $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

说明：若特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 存在实根 r_1, r_2，则有 $\begin{cases} p = -(r_1 + r_2) \\ q = r_1 \cdot r_2 \end{cases}$

【例】（2015 年）求微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 2, y'\big|_{x=0} = 0$ 的特解.

答案： $y = e^{-x}(2\cos 2x + \sin 2x)$

【例】（2016 年）已知函数 $y = e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 2y' + ay = 0$ 的一个特解，求常数 a 的值，并求该微分方程的通解.

答案： $y = C_1 + C_2 e^{2x}$

【例】（2017 年）微分方程 $y'' - 9y = 0$ 的通解 y=__________.

答案： $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$

第六章 常数项级数

【考试要求】

(1)理解常数项级数收敛、发散及和的定义.

(2)掌握几何级数、调和级数及 p-级数的敛散性.

(3)理解收敛级数的基本性质.

(4)掌握正项级数的比较审敛法和比值审敛法.

【知识点一】常数项级数的概念(☆)

1. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛

设有数列 $\{u_n\}$，令 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，若 $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且极限 S 叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和.

【例】（2017 年）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的和为__________.

答案：1

2. 几何级数 $(a\neq 0, q\neq 0)$ (☆)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, |q|<1 \Rightarrow \text{级数收敛} \\ \infty, |q|>1 \Rightarrow \text{级数发散} \end{cases}$$

3. 调和级数(☆)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散的

4. p—级数（☆)

$$\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛}, p>1 \\ \text{发散}, p\leq 1 \end{cases}$$

【知识点二】常数项级数的基本性质(☆)

1. 设 k 为非零常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 敛散性相同.

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S, σ，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S \pm \sigma$.

①若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 中一个收敛，另一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 一定发散.

②若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 可能收敛，也可能发散.

反例：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$均发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$收敛.

3. 改变级数前有限项不影响级数的收敛性.

4. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

若 $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

【知识点三】正项级数敛散性的判定(☆)

1. 首先判断 $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ 是否成立，若成立级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.
2. 若级数是两个级数的和差，首先考虑级数性质判断.
3. 若级数与几何级数、调和级数和 p—级数相似，采用比较审敛法

(1)（比较审敛法）设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且$u_n \le v_n (n=1,2,\cdots)$.

①若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

②若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

(2)（比较审敛法的极限形式）设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A$.

①若$0 < A < +\infty$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散.

②若 $A = 0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

③若 $A = +\infty$，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

4. 若通项中含有 $a^n, n^n, n!$ 的级数，采用比值审敛法

◇（比值审敛法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$.

①若 $\rho<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

②若 $\rho>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

③若 $\rho=1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛，也可能发散.

☆若级数通项中含有 $\sin n, \cos n, \arctan n$ 或者分子分母含有一个常数，建议先采用放缩法再判断级数的敛散性.其中：$|\sin n|\le 1, |\cos n|\le 1, |\arctan n|\le\frac{\pi}{2}$

【例】（2015 年）下列级数中收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{n^2}\right]$

答案：D

【例】（2015 年）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$ 的敛散性.

答案：收敛

【例】（2016 年）已知常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n=\frac{n}{n+1}(n\in N^*)$，则下列常数项级数中发散的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}2u_n$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n-1})$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+\frac{1}{n})$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$

答案：C

【例】（2016 年）已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n u_n(n\in N^*)$，$u_1=1$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

答案：收敛

【例】（2017 年）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4^n}{n!}\right)$ 的敛散性.

答案：收敛

专题：证明题及判断根的存在性

一、.利用零点定理判断方程根的存在性

（1）方程根的存在性的判定步骤

①构造一个闭区间$[a,b]$且函数$f(\mathrm{x})$在$[a,b]$上连续；

②计算$f(a),f(b)$，说明$f(a)\cdot f(b)<0$；

③由零点定理可得方程$f(\mathrm{x})=0$在区间(a,b)内至少有一个根。

（2）仅有一根的证明步骤

在第（1）步的基础上判定函数单调即可。

二、函数不等式的证明方法

（1）利用函数的单调性证明不等式；

（2）利用微分中值定理证明不等式（一般要构造函数）；

（3）利用最值性证明不等式；

（4）利用凹凸性证明不等式。

【例】（2015 年）已知$f(\mathrm{x})$是定义在 R 上的单调递减的可导函数，且$f(1)=2$，函数$F(\mathrm{x})=\int_0^x f(t)dt-x^2-1$.

⑴判断曲线$y=F(\mathrm{x})$在 R 上的凹凸性，并说明理由；

⑵证明：方程$F(\mathrm{x})=0$在区间(0,1)内有且仅有一个实根.

答案：(1)凸的

【例】（2016 年）设函数$f(\mathrm{x})=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$，证明：

⑴当$x\to 0$时，$f(\mathrm{x})$是比 x 高阶的无穷小量；

⑵当$x>0$时，$f(\mathrm{x})>0$.

【例】（2017 年）已知函数$f(x)=\arctan\frac{1}{x}$.

（1）证明：当$x>0$时，恒有$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$；

（2）试问方程$f(x)=x$在区间$(0,+\infty)$内有几个实根？

答案：(2)一个